

NIEUWE DELTA-T

5/6

AFGELEIDEN VAN VEELTERMFUNCTIES
LEERPLAN B/C

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Carl Van Hove

Plantyn

ISBN 978-90-301-4514-1

DIT BOEK BIEDT MEER

BIJ DIT BOEK HOORT EEN LERARENKIT MET
AL HET ONLINE MATERIAAL VOOR DE LEERKRACHT

1 BESTEL

Op **www.plantyn.com** kun je de lerarenkit voor jouw leerjaar bestellen.

2 ACTIVEER

Je ontvangt een mail met de activeringscode.
Ga naar **www.plantyn.com/activeer** en volg de instructies.

3 DEEL

Nu heb je toegang tot al het digitale materiaal bij deze uitgave.

Ook je collega's kunnen de activeringscode één jaar lang gebruiken.

VOORWAARDEN

Nadat je de code geactiveerd hebt, heb je een jaar lang toegang tot de digitale content. Elk jaar ontvang je daarvoor een factuur, maar de activatie blijft geldig.

Nieuwe Delta-T

leermap 5/6
afgeleiden van veeltermfuncties
leerplan B-C

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Carl Van Hove

Plantyn

Opmaak omslag: The Line
Omslagillustratie: Corbis
Ontwerp binnenwerk: Composition
Opmaak binnenwerk: Composition
Cartoons: Stefaan Provijn
Illustratieverantwoording:
Fotolia.com: Alexander Raths, anyaberkut, Arno Bachert, Eric Gevaert, fabiomax, Givaga, havana1234, Hayati Kayhan, Jim Parkin, kingan, Marco Govel, Michael Flippo, michaeljung, Monkey Business, Mopic, Nejron Photo, nobeastsofierce, oscar0, Rawpixel, rodjulian, shimashima, sonya etchison, svedoliver, Tan Kian Khoon, TT, TTstudio, xixinxing
Stefaan Provijn, Dreamstime, iStockphoto, Reporters, Wikipedia\Ad Meskens, Wikipedia\Augustas Didžgalvis, Wikipedia\Jan Arkesteijn 'Onder GNU-licentie voor vrije documentatie", Wikipedia\Tony Hisgett

Auteurs DELTA-T en NIEUWE DELTA-T
Gerda Barberien, Jos Casteels, Peter Crokaerts, Danielle De Vos, Luc Goris, Geert Heynickx, André Huysmans, Els Jacobs, Roland Rottiers, Jos Salaets, Frederik Smessaert, Conny Van den Brande, Luc Van den Broeck, Annick Van den put, Katrijn Van Eekert, Carl Van Hove

Redactie: Jos Casteels, Frederik Smessaert

Plantyn

Plantyn
Motstraat 32, 2800 Mechelen
T 015 36 36 36
F 015 36 36 37
klantendienst@plantyn.com
www.plantyn.com

Dit boek werd gedrukt op papier van verantwoorde herkomst.

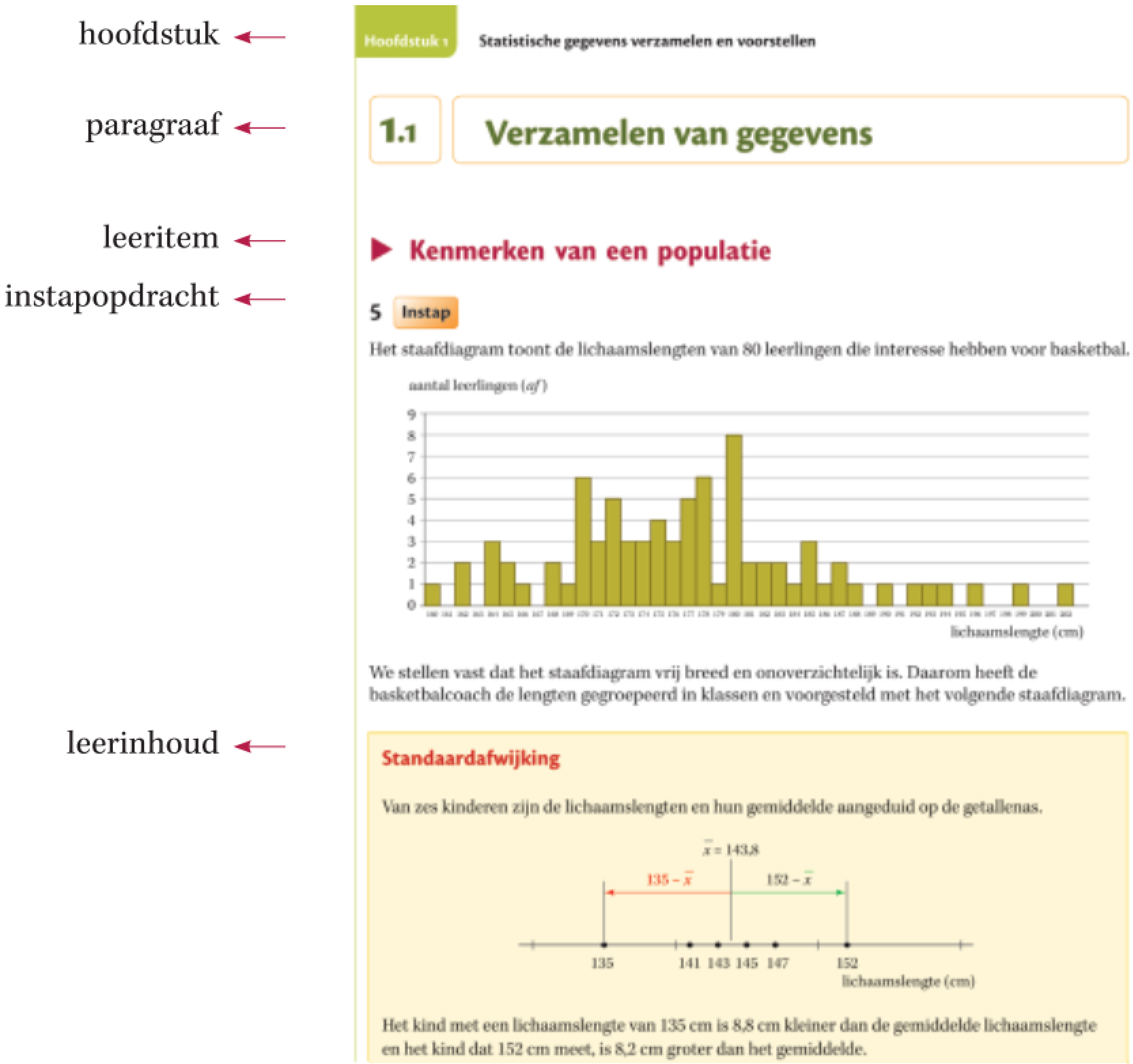
NUR 128

ISBN 978-90-301-4514-1 22212/0 D2015/0032/0055

De leermap **NIEUWE DELTA-T Afgeleiden van veeltermfuncties** is in hoofdzaak bestemd voor leerlingen uit de derde graad van de TSO-studierichtingen en de KSO-studierichtingen die leerplan b of leerplan c volgen.

Opbouw van de leermappen Nieuwe Delta-T

Elk hoofdstuk wordt ingeleid met een passende opening over het te bestuderen onderwerp. De genummerde paragrafen van elk hoofdstuk bestaan uit een aantal leeritems. Elk leeritem wordt ingeleid met een instapopdracht.



Elk hoofdstuk begint met een inhoudstafel die aanwijst op welke pagina elk leeritem staat.
In elk leeritem wordt de theorie compact uitgelegd en toegepast op concrete voorbeelden.
De soort leerinhoud is herkenbaar aan de **achtergrondkleur**.

Kennis en rekenregels om de opdrachten te kunnen uitvoeren.

Doelgericht gebruik van de rekenmachines TEXAS INSTRUMENTS en CASIO.

Vaardigheden om vlot te kunnen meten, schetsen en tekenen.

Extra leerinhouden om uitbreidingsdoelstellingen te realiseren.

Didactisch gerangschikte opdrachten zorgen voor een systematische verwerking van de leerinhouden.

Instap Leeritems worden ingeleid met probleemstellingen uit de praktijk.

De moeilijkheidsgraad van de opdrachten is aangegeven met gekleurde vierkantjes.

Eenvoudige opdrachten

Opdrachten met een bijkomende moeilijkheidsgraad

Opdrachten met een hogere moeilijkheidsgraad

Oefenopdrachten op de uitbreidingsleerstof worden aangegeven met een schaduwvlakje.

Instap

Elke paragraaf wordt afgesloten met **Uitdagingen**.

De **Uitdagingen** laten voldoende ruimte voor begeleid zelfstandig leren of zelfstandig leren en helpen de verschillen in studietempo opvangen.



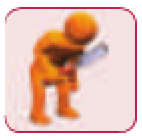
Uitdagingen

1 In een klas scoorden de meisjes gemiddeld 8,5 en de jongens 7,4 op een toets wiskunde.
Het gemiddelde van de klas is 8. Er zitten 12 meisjes in die klas.
Hoeveel leerlingen telt deze klas?

(A) 16 B (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Vlaamse Wiskunde Olympiade

In de **Exploraties** komen onderwerpen aan bod die binnen of buiten de wiskunde liggen.



Exploratie

Kerncijfers

De Algemene Directie Statistiek en Economische Informatie van de FOD Economie heeft de opdracht om aan de informatiebehoeften van de overheid, de bedrijfswereld en de burgers te voldoen door hen actuele cijfers over de toestand van het land aan te bieden.

De brochure 'Kerncijfers' geeft een overzicht van wat er aan basisgegevens beschikbaar is.

Het **trefwoordenregister** geeft aan op welke pagina we de nodige informatie kunnen terugvinden.



Trefwoordenregister

A

1

Grafieken van veeltermfuncties

Een bedrijf is gespecialiseerd in de productie van ledverlichting. Met behulp van een marktonderzoek gaat de firma na hoe de verkoopprijs van een bepaald type lamp de jaarlijkse winst bepaalt. Dit verband wordt vastgelegd in een grafiek. Hiermee kunnen ze de gestelde problemen oplossen.

- Wat is de jaarlijkse winst als de prijs van een lamp 25 euro bedraagt?
- Voor welke verkoopprijs is de winst maximaal?
- Rond welk bedrag moet de verkoopprijs schommelen als de jaarlijkse winst 10 miljoen euro moet bedragen?
- Hoe groot is de winst of het verlies als het bedrijf, bij wijze van reclamestunt, twee lampen voor de prijs van één zou verkopen?

Om op deze vragen te antwoorden, moeten de onderzoekers de kenmerken van deze grafiek bestuderen en interpreteren.

1.1 Grafieken van machtsfuncties

1.2 Grafieken van veeltermfuncties



1.1 Grafieken van machtsfuncties

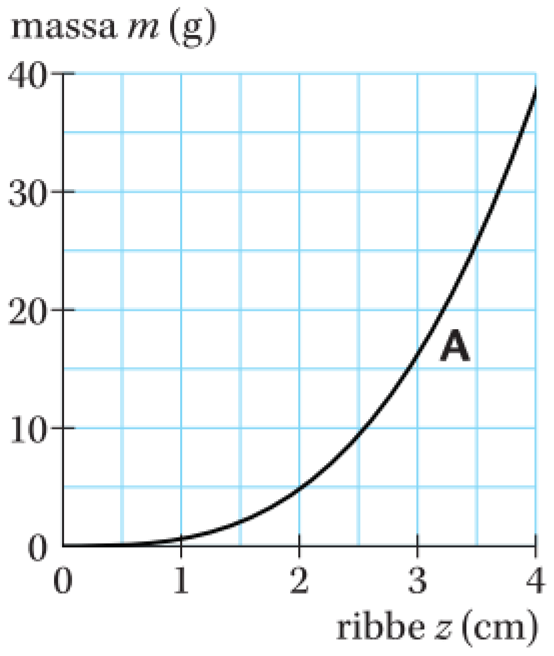
▶ Kenmerken van machtsfuncties

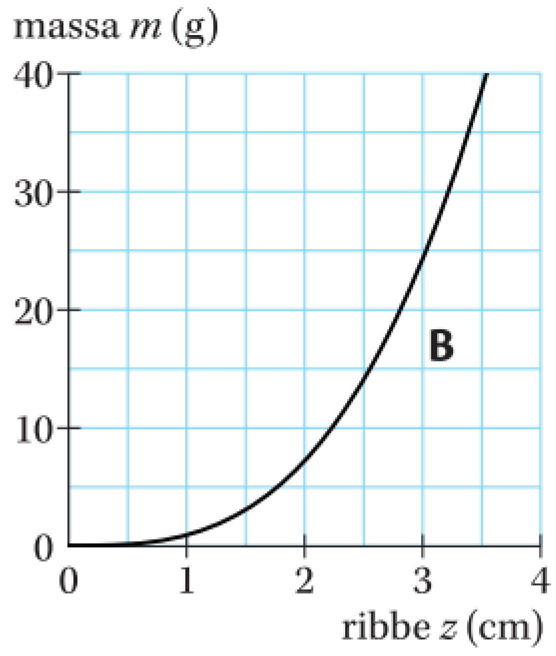
1 **Instap**

Verhuizers weten maar al te goed dat eiken meubelen veel zwaarder wegen dan hun soortgenoten in dennenhout.



De grafieken beschrijven de massa van een eikenhouten kubus en van een dennenhouten kubus in functie van de lengte van de ribben. Beide kubussen zijn massief.





1 Welke grafiek behoort bij welke houtsoort? ....

2 Welke voorschriften hebben de twee grafieken als de dichtheid van de eiksoort 0,9 g/cm^3 bedraagt en die van dennenhout 0,6 g/cm^3 is?

....

....

3 Hoeveel weegt een eikenhouten kubus waarvan de ribbe 50 cm lang is?

....

4 Hoe lang is de ribbe van een dennenhouten kubus met dezelfde massa?

....

....

....

....

Machtsfuncties met natuurlijke exponenten

Een **machtsfunctie** heeft een voorschrift van de vorm

$$f(x) = ax^n$$

waarbij de coëfficiënt a en de exponent n verschillend zijn van nul. Als n een natuurlijk getal voorstelt, dan spreken we van **machtsfuncties met natuurlijke exponenten**.

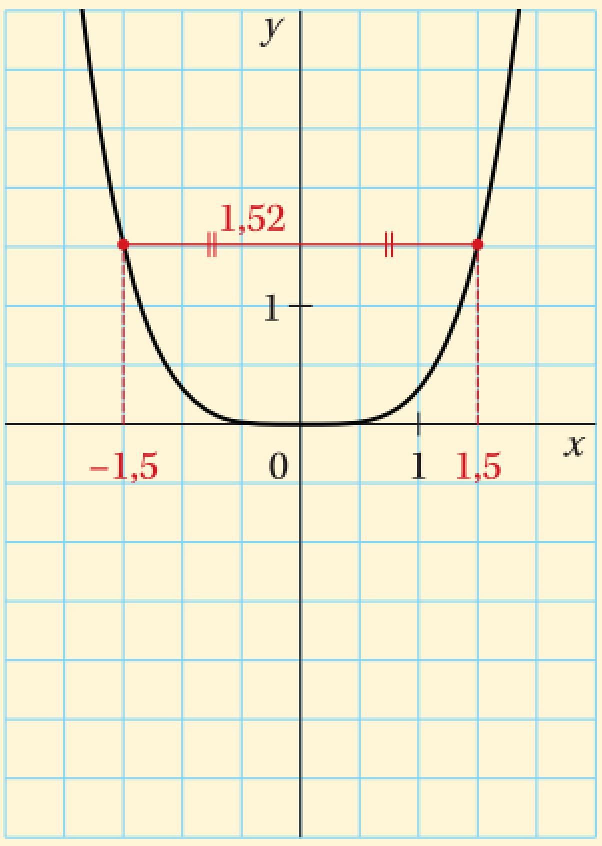
Een grafiek met voorschrift $f(x) = ax^n$ is

- **lijnsymmetrisch** ten opzichte van de y-as als n een **even** getal is;
- **puntsymmetrisch** ten opzichte van de oorsprong als n een **oneven** getal is.

Voorbeelden

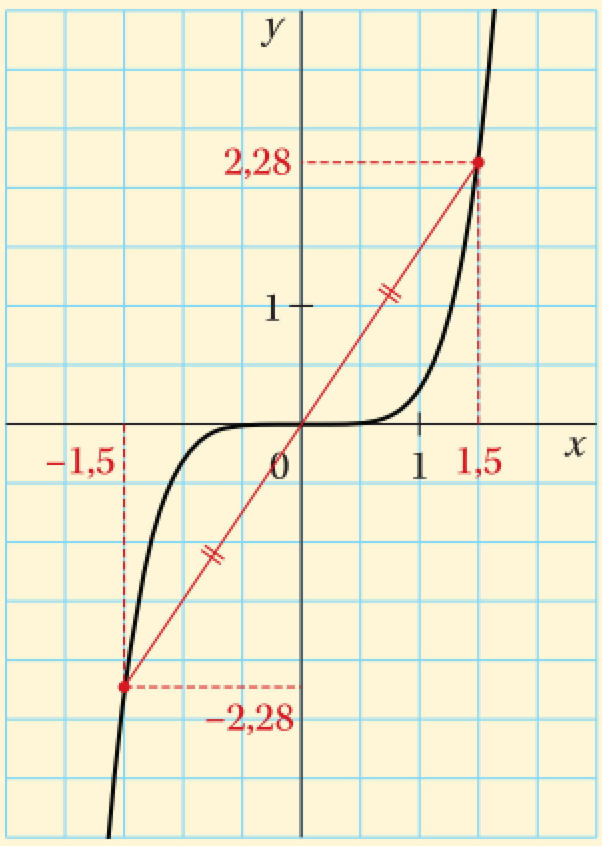
We onderzoeken de machtsfuncties $f(x) = 0{,}3x^4$ en $g(x) = 0{,}3x^5$.

$f(x) = 0{,}3x^4$



x	$f(x)$
...	...
−2	4,8
−1,5	1,52
−1	0,3
−0,5	0,02
0	0
0,5	0,02
1	0,3
1,5	1,52
2	4,8
...	...

$g(x) = 0{,}3x^5$



x	$g(x)$
...	...
−2	−9,6
−1,5	−2,28
−1	−0,3
−0,5	−0,01
0	0
0,5	0,01
1	0,3
1,5	2,28
2	9,6
...	...

We stellen vast dat de grafieken onbegrensde krommen door de oorsprong zijn.

De grafiek van $f(x) = 0{,}3x^4$ is lijnsymmetrisch ten opzichte van de y-as.
In de tabel zijn de functiewaarden van tegengestelde originelen gelijk.

De grafiek van $g(x) = 0{,}3x^5$ is puntsymmetrisch ten opzichte van de oorsprong.
In de tabel zijn de functiewaarden van tegengestelde originelen tegengesteld.

2

Welke functie is een machtsfunctie waarvan de grafiek lijnsymmetrisch is ten opzichte van de y-as? Vink elk passend functievoorschrift aan.

1 $f(x) = 3x^4$ ☐
2 $f(x) = 2x^5$ ☐
3 $f(x) = -8x^2$ ☐
4 $f(x) = 1{,}5x^3$ ☐
5 $f(x) = -\frac{3}{4}x^8$ ☐
6 $f(x) = x^6$ ☐
7 $f(x) = -x^2$ ☐
8 $f(x) = 3x$ ☐
9 $f(x) = -2{,}4x^7$ ☐
10 $f(x) = \frac{\pi}{2}x^{10}$ ☐

3

Welke functie is een machtsfunctie waarvan de grafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van de oorsprong? Vink elk passend functievoorschrift aan.

1 $f(x) = 3x^4$ ☐
2 $f(x) = 2x^5$ ☐
3 $f(x) = -8x^2$ ☐
4 $f(x) = 1{,}5x^3$ ☐
5 $f(x) = -\frac{3}{4}x^8$ ☐
6 $f(x) = x^6$ ☐
7 $f(x) = -x^2$ ☐
8 $f(x) = 3x$ ☐
9 $f(x) = -2{,}4x^7$ ☐
10 $f(x) = \frac{\pi}{2}x^{10}$ ☐

4

Gegeven zijn de coördinaten van het punt P. Bepaal de coördinaten van een symmetrisch gelegen punt Q als we weten dat de punten P en Q op de grafiek liggen van een machtsfunctie met een *even* exponent.

1 $P(1, 1)$ ....
2 $P(2, 8)$ ....
3 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{64}\right)$ ....
4 $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{81}\right)$ ....
5 $P(-0{,}2\,;0{,}128)$ ....
6 $P(-0{,}4\,;-10{,}24)$ ....

5

Gegeven zijn de coördinaten van het punt P. Bepaal de coördinaten van een symmetrisch gelegen punt Q als we weten dat de punten P en Q op de grafiek liggen van een machtsfunctie met een *oneven* exponent.

1 $P(1, 1)$ ....

2 $P(2, 8)$ ....

3 $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{64}\right)$ ....

4 $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{81}\right)$ ....

5 $P(-0{,}2\,;\,0{,}128)$ ....

6 $P(-0{,}4\,;\,-10{,}24)$ ....

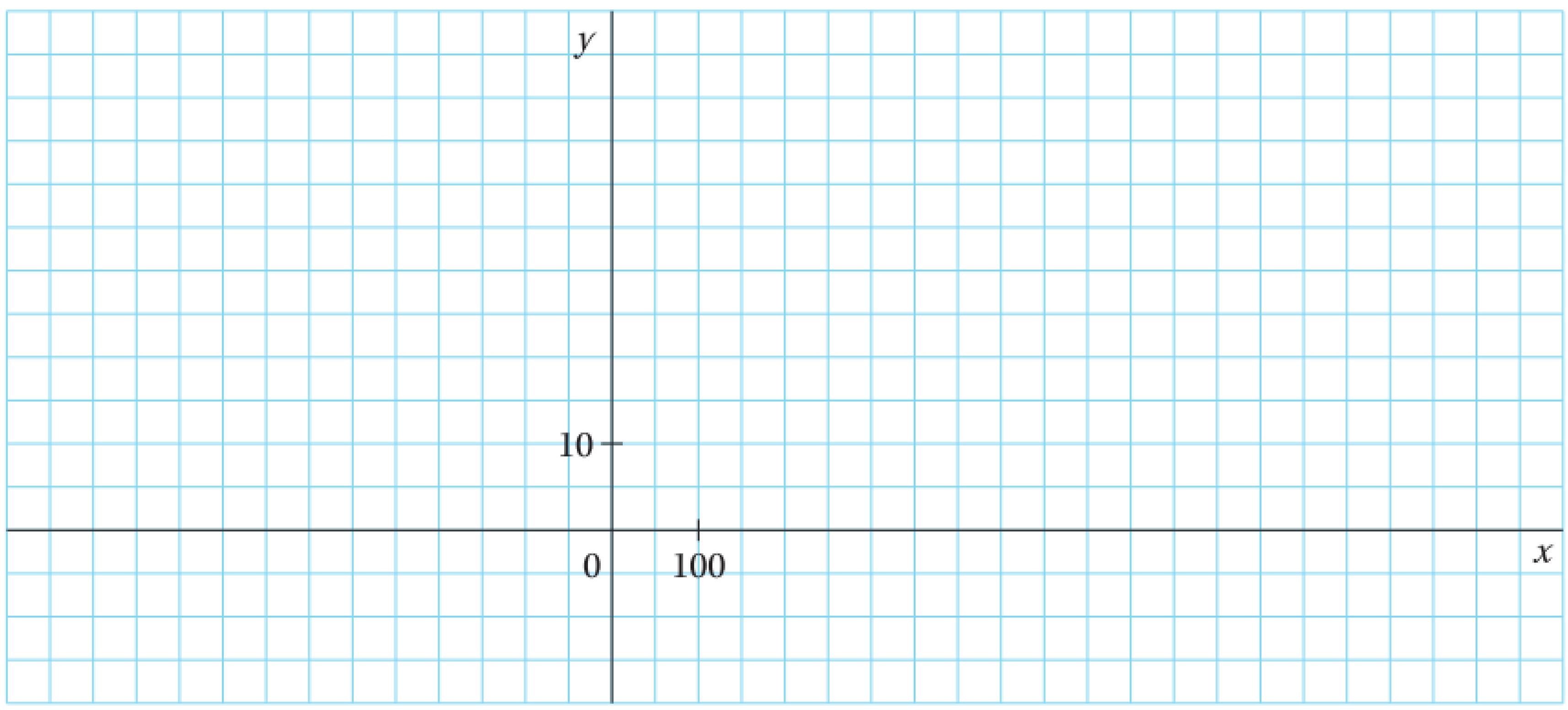
6

De profieldoorsnede van een skipiste kunnen we beschrijven met de formule

$y = (5 \cdot 10^{-8})x^3$ met $-600 \leqslant x \leqslant 1000$ y: hoogte in m x: horizontale afstand in m



1 Schets de skipiste.



2 Wat is het hoogteverschil van deze piste?

....

....

....

7

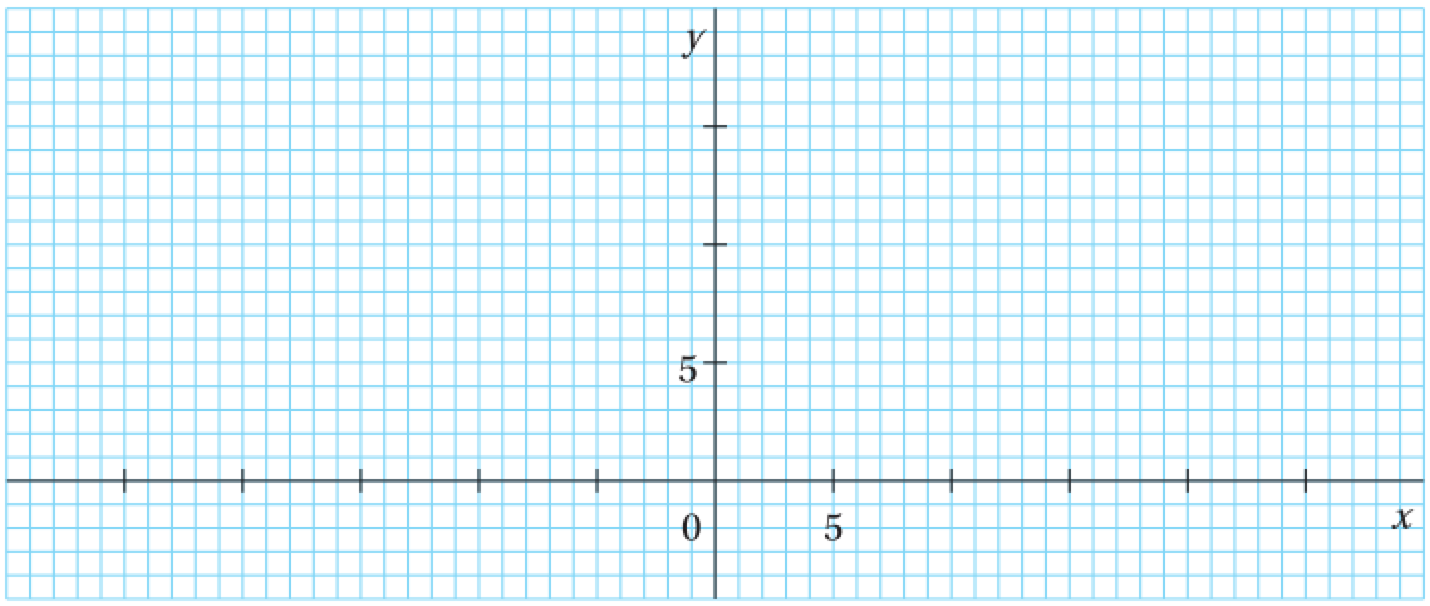
Ronde fruitschalen bestaan in alle vormen en kleuren. De profieldoorsnede van een fruitschaal kunnen we beschrijven met de formule

$y = 0{,}00004x^4$ y: hoogte in cm x: straal in cm

1 Wat is de hoogte van een fruitschaal met een diameter van 50 cm?

....

2 Schets de doorsnede van deze fruitschaal.





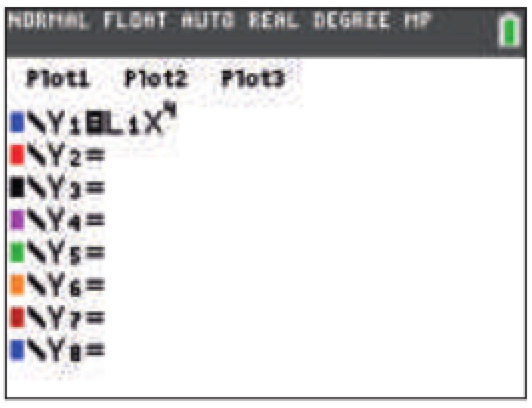
▶ Grafieken met voorschrift $f(x) = ax^n$

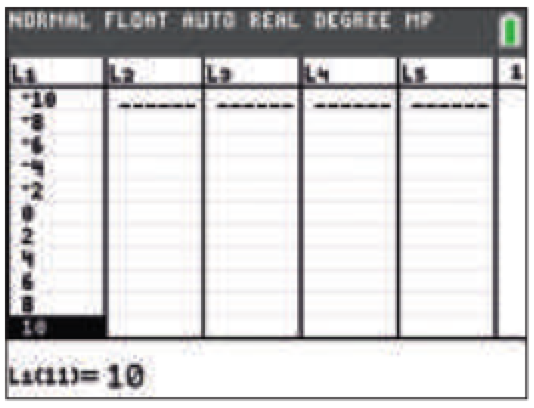
8 Instap

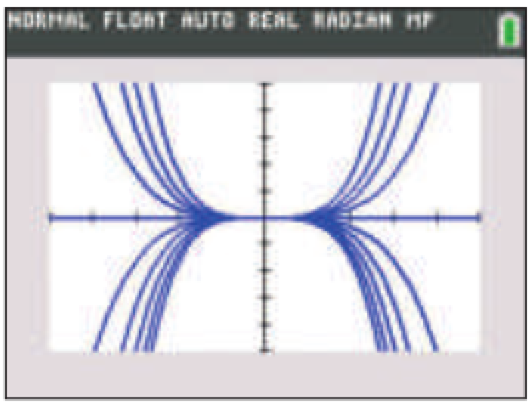
Met de grafische rekenmachine onderzoeken we de ligging en de steilheid van grafieken van machtsfuncties met natuurlijke exponenten.

We voeren de functie $f(x) = ax^4$ in om het gedrag van lijnsymmetrische grafieken te onderzoeken. De variabele a laten we variëren van -10 tot 10 met stapgrootte 2. De dynamische grafiek tonen we in het kijkvenster met de venstervariabelen $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $y_{min} = -500$ en $y_{max} = 500$.

TEXAS INSTRUMENTS

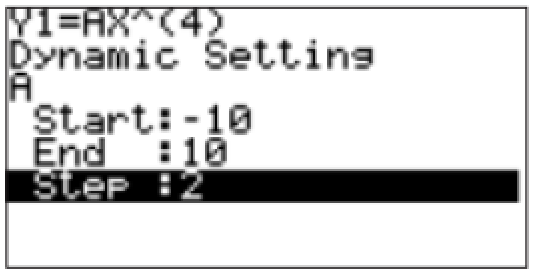


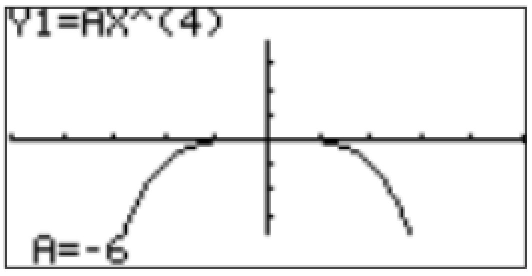




CASIO







1 Voor welke waarden van a ligt de grafiek boven de x-as? ....

2 Voor welke waarden van a ligt de grafiek onder de x-as? ....

3 Voor welke waarden van a is de grafiek het steilst? ....

We vervangen het ingevoerde voorschrift door $f(x) = ax^3$ om het gedrag van puntsymmetrische grafieken te onderzoeken. De instelling van de variabele a en het kijkvenster laten we ongewijzigd.

4 Voor welke waarden van a ligt de grafiek in het eerste kwadrant (positieve x- en y-coördinaten) en in het derde kwadrant (negatieve x- en y-coördinaten)?

....

5 Voor welke waarden van a ligt de grafiek in het tweede kwadrant (negatieve x-coördinaten en positieve y-coördinaten) en in het vierde kwadrant (positieve x-coördinaten en negatieve y-coördinaten)?

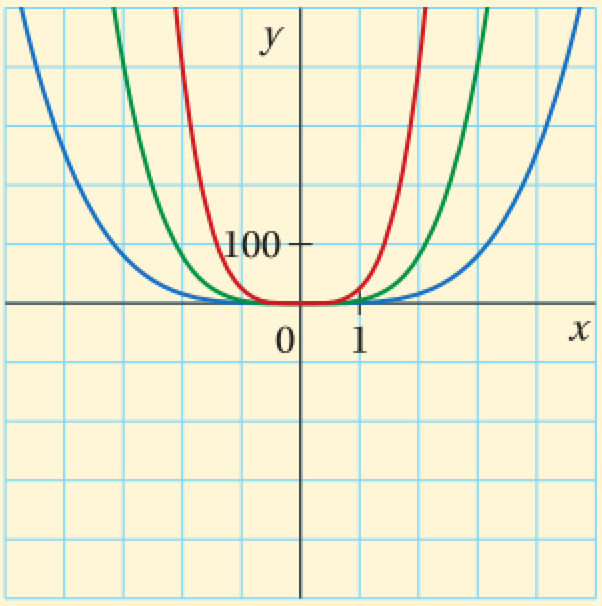
....

6 Voor welke waarden van a is de grafiek het steilst? ....

Grafieken met voorschrift $f(x) = ax^n$

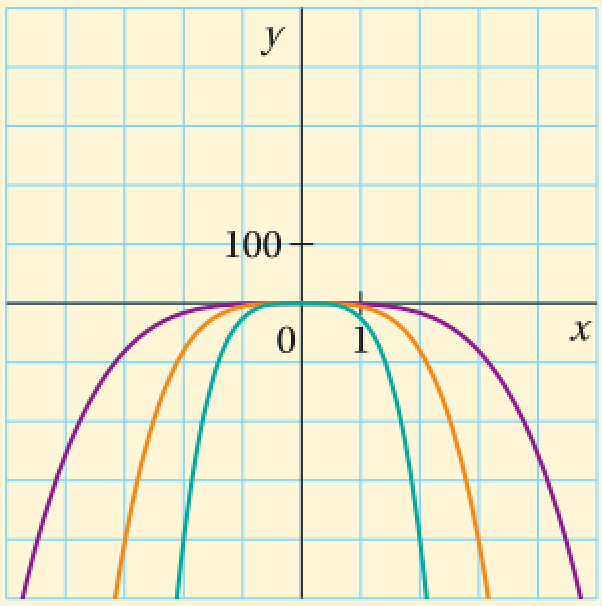
We onderzoeken de familie grafieken met voorschrift $f(x) = ax^n$ voor verschillende waarden van a.
We maken een onderscheid tussen:

- lijnsymmetrische grafieken met even exponent, bijvoorbeeld $f(x) = ax^4$.

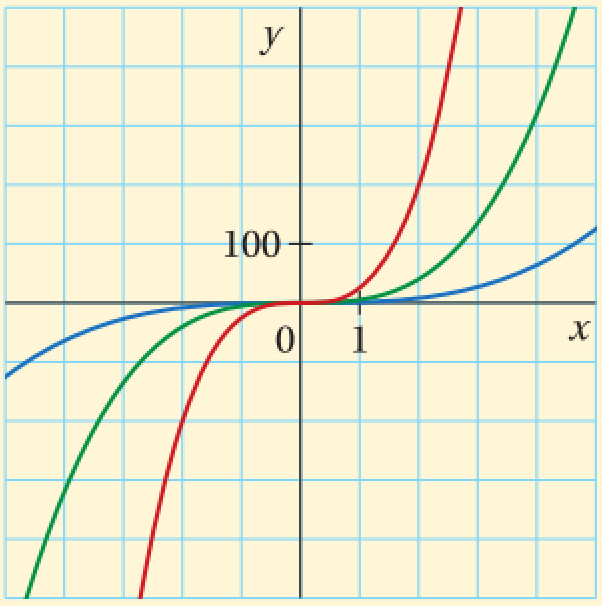


$a = 25$
$a = 5$
$a = 1$

$a = -1$
$a = -5$
$a = -25$

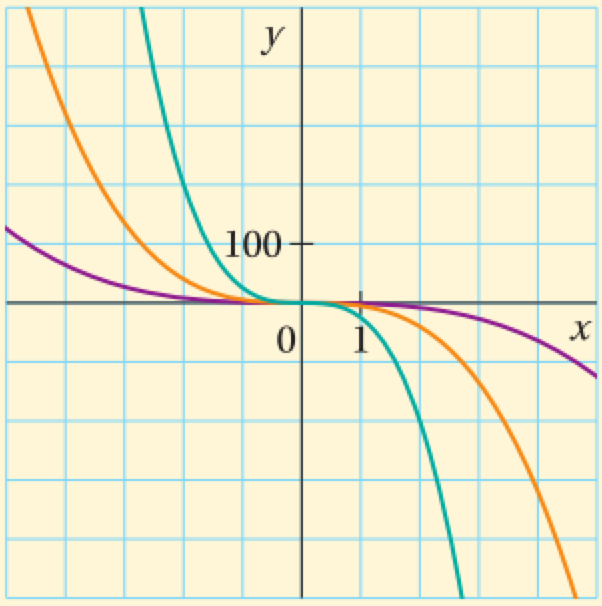


- puntsymmetrische grafieken met oneven exponent, bijvoorbeeld $f(x) = ax^3$.



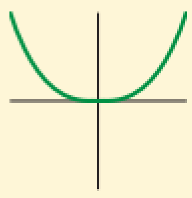
$a = 25$
$a = 5$
$a = 1$

$a = -1$
$a = -5$
$a = -25$

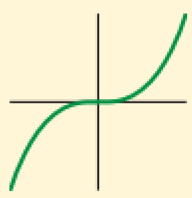


We stellen vast dat het **teken van *a*** de **ligging** van de grafiek bepaalt.

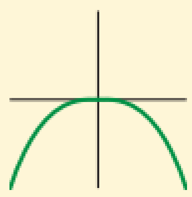
- Als $a > 0$, dan liggen lijnsymmetrische grafieken boven de x-as en



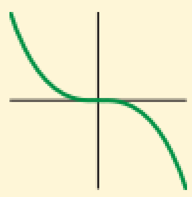
  puntsymmetrische grafieken in het eerste en in het derde kwadrant.



- Als $a < 0$, dan liggen lijnsymmetrische grafieken onder de x-as en



  puntsymmetrische grafieken in het tweede en in het vierde kwadrant.

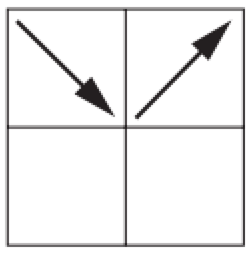


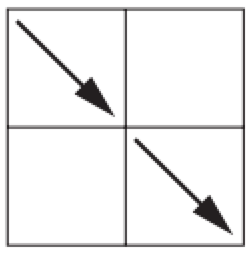
De **absolute waarde van *a*** bepaalt de **steilheid** van de grafieken.

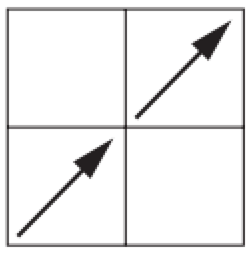
- Als $|a|$ toeneemt, dan wordt de grafiek steiler.
- Als $|a|$ afneemt, dan wordt de grafiek minder steil.

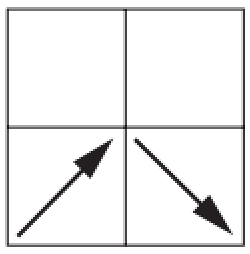
9

Grafieken van machtsfuncties met natuurlijke exponenten lopen van het tweede of het derde kwadrant naar het eerste of het vierde kwadrant, zoals afgebeeld met de pictogrammen.


A


B


C


D

Met welk pictogram komt het grafisch kenmerk van de grafiek van de functie overeen? Schrijf de passende letter in elk vakje.

1 $f(x) = -2x^3$ ☐

2 $f(x) = 5x^2$ ☐

3 $f(x) = 7x^5$ ☐

4 $f(x) = -x^4$ ☐

5 $f(x) = \frac{1}{5}x^6$ ☐

6 $f(x) = 0{,}3x^9$ ☐

7 $f(x) = -4x^8$ ☐

8 $f(x) = -1{,}2x$ ☐

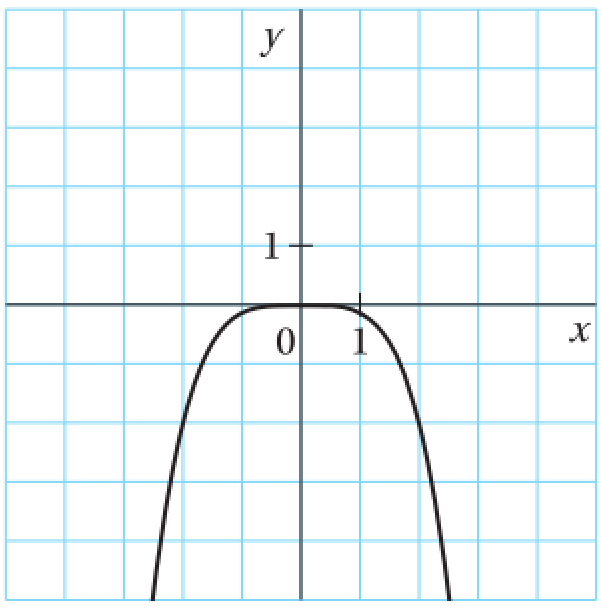
9 $f(x) = \frac{4}{3}x^7$ ☐

10 $f(x) = -2{,}5x^5$ ☐

10

Gegeven is de grafiek van een machtsfunctie. Bepaal of de exponent in het functievoorschrift even of oneven is en de coëfficiënt positief of negatief is.

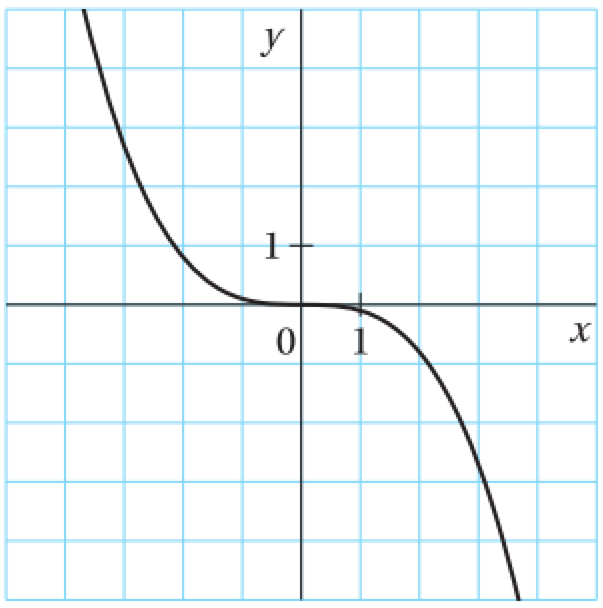
1



exponent: ....

coëfficiënt: ....

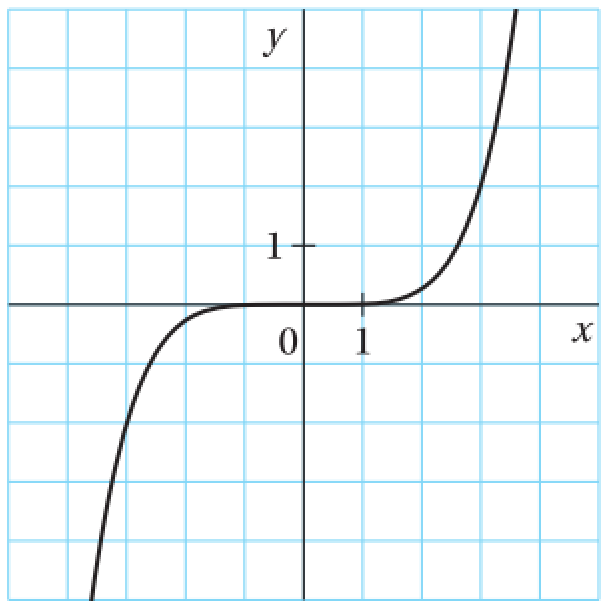
2



exponent: ....

coëfficiënt: ....

3

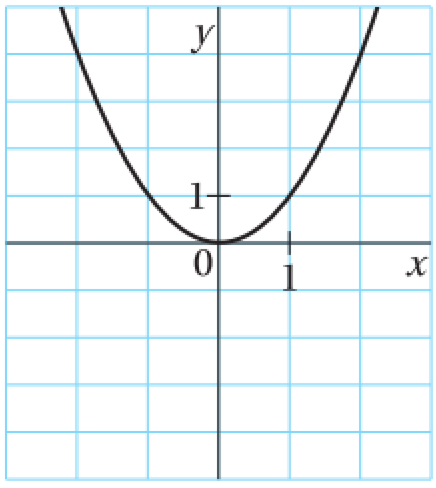


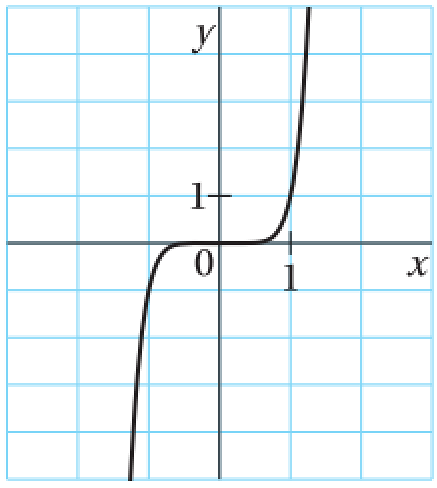
exponent: ....

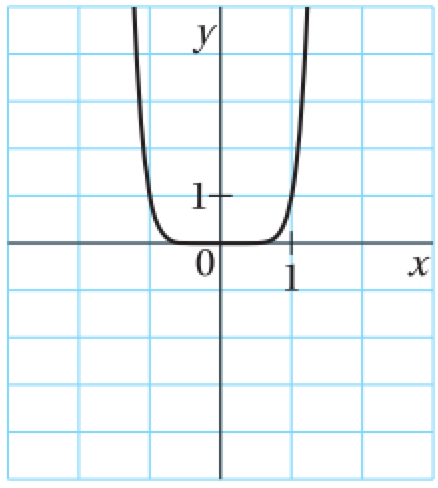
coëfficiënt: ....

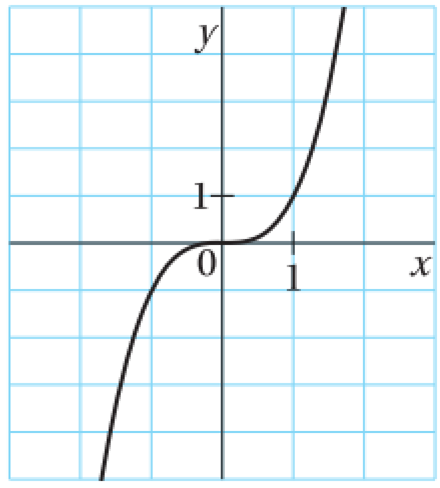
11

Verbind elke machtsfunctie met zijn grafiek.

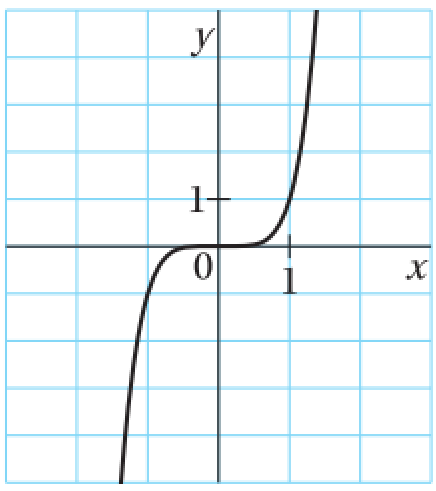


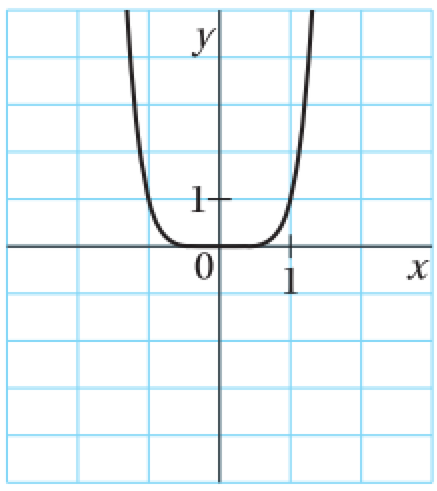


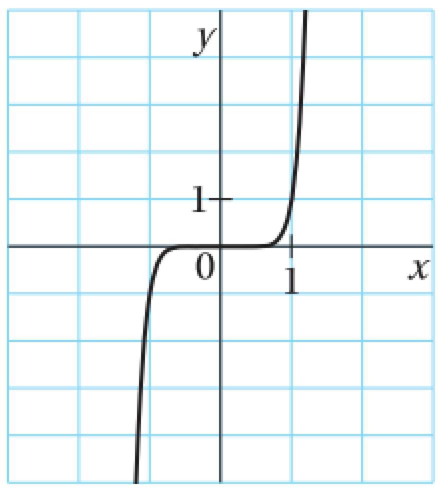


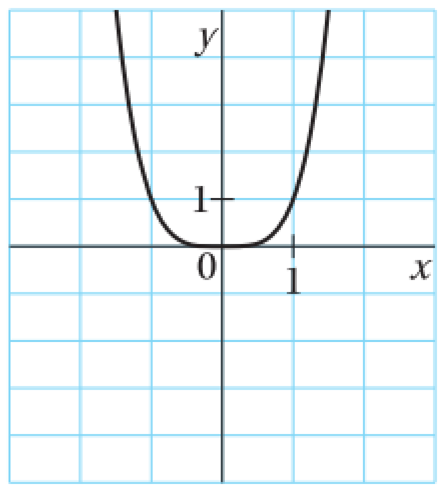


$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^4$ $f(x) = x^5$ $f(x) = x^6$ $f(x) = x^7$ $f(x) = x^8$ $f(x) = x^9$









Uitdagingen

1 De grafiek van een machtsfunctie $f(x) = ax^n$ gaat door de punten $P(-1, -4)$ en $Q(2, 32)$.
Bereken de coëfficiënt a en de exponent n van deze machtsfunctie.

zie pagina 285

2 Gegeven zijn de machtsfuncties $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $g(x) = \frac{1}{4}x^4$ en $h(x) = \frac{1}{5}x^5$.

1. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A, B en C.
   Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

2. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A', B' en C'.
   Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

3. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $(-1, 0)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A'', B'' en C''.
   Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

zie pagina 285

1.2 Grafieken van veeltermfuncties

▶ Kenmerken van veeltermfuncties

1 Instap

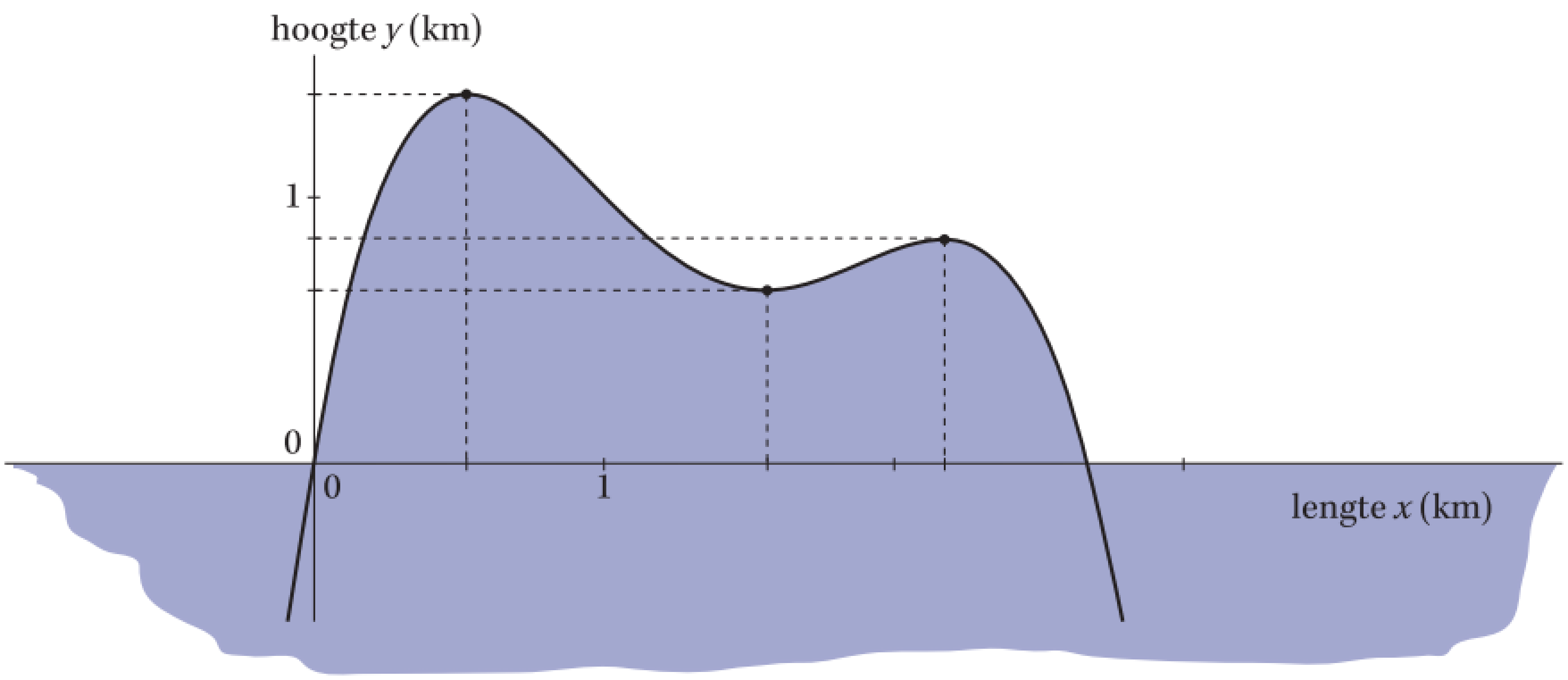
Voor de aanleg van een tunnel door een gebergte in Zwitserland heeft een ingenieursbureau de vorm van de te doorboren bergen kunnen vastleggen in de formule

$y = -0{,}9x^4 + 5{,}1x^3 - 9{,}6x^2 + 6{,}4x$

y : hoogte in km van het gebergte ten opzichte van het wegdek
x : lengte in km van het wegdek



Op de plannen valt het wegdek samen met de x-as. Een ingang van de tunnel ligt in de oorsprong van het assenstelsel. De grafiek toont het profiel van het gebergte.



De formule $y = -0{,}9x^4 + 5{,}1x^3 - 9{,}6x^2 + 6{,}4x$ beschrijft een functie omdat we voor elke lengte x van het wegdek slechts één bijbehorende hoogte y van het gebergte kunnen berekenen.

1 Wat is de graad en de benaming van deze functie als we weten dat de hoogste exponent van x de graad bepaalt? ....

2 Waarom wordt deze functie ook veeltermfunctie genoemd?

....

De antwoorden op de volgende vragen die de projectleider stelt bij het bespreken van de plannen, kan hij berekenen met de opties minimum en maximum van zijn grafische rekenmachine.

3 Hoeveel meter boven het wegdek liggen de twee toppen? ....

4 Hoeveel meter boven het wegdek ligt het laagste punt van de vallei? ....

5 Op welke plaatsen in de tunnel zullen de auto's onder de toppen rijden?

....

6 Op welke plaats zullen ze onder het laagste punt van de vallei rijden? ....

Veeltermfuncties

Een **veeltermfunctie** of een ***n*-de graadsfunctie** heeft een voorschrift van de vorm

$f(x) = a$ — **constante functie**

$f(x) = ax + b$ — **eerstegraadsfunctie**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ — **tweedegraadsfunctie**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ — **derdegraadsfunctie**

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ — **vierdegraadsfunctie**

...

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + ... + px + q \qquad n \in \mathbb{N}$ — ***n*-de graadsfunctie**

waarbij de hoogste exponent van x de **graad** van de functie bepaalt.

Merk op

Voorschriften van n-de graadsfuncties zijn opgebouwd uit veeltermen.

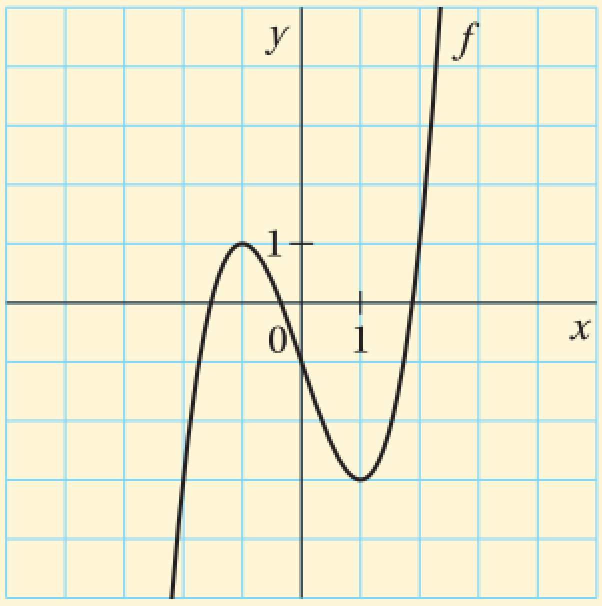
- De functie $f(x) = x^5 + 8x^2 + 3$ is een vijfdegraadsfunctie omdat $x^5 + 8x^2 + 3$ een veelterm is van de vijfde graad.
- De functie $f(x) = x^3 + \frac{5}{x}$ is geen n-de graadsfunctie

  omdat $x^3 + \frac{5}{x}$ geen veelterm is. $\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1}$ en $-1 \notin \mathbb{N}$

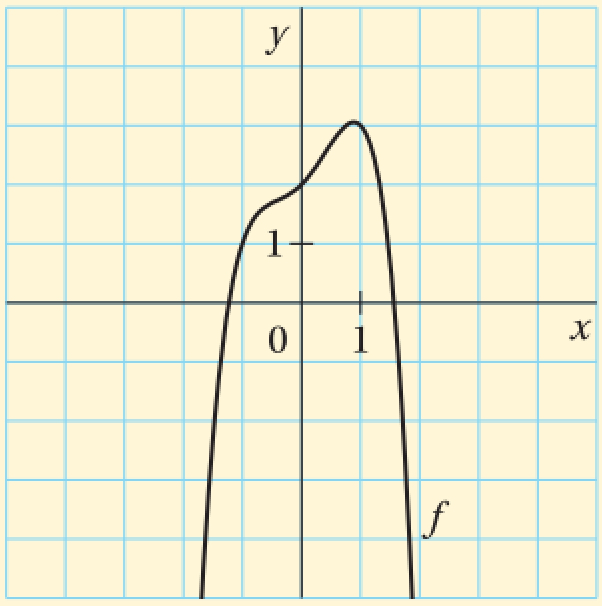
Grafieken van veeltermfuncties

Veeltermfuncties hebben grafieken van uiteenlopende vormen die niet onderbroken zijn.

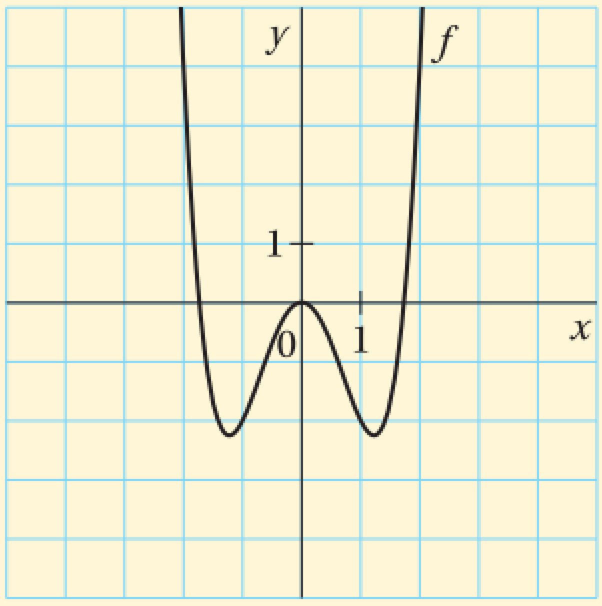
$f(x) = x^3 - 3x - 1$



$f(x) = -x^4 + x^2 + x + 2$

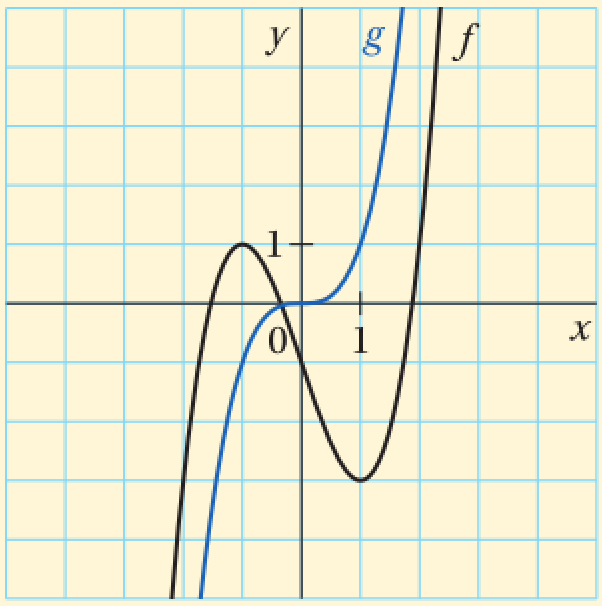


$f(x) = x^4 - 3x^2$

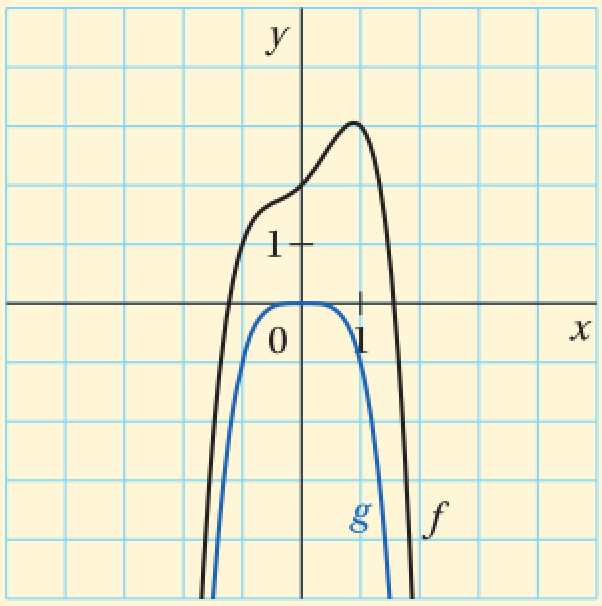


Voor voldoende kleine of voldoende grote originelen zal de grafiek van een veeltermfunctie zich gedragen zoals de grafiek die de **hoogstegraadsterm** als voorschrift heeft.

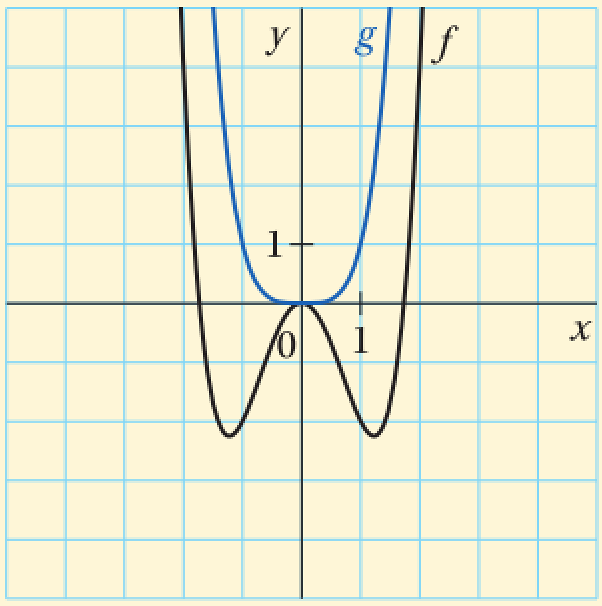
$g(x) = x^3$



$g(x) = -x^4$



$g(x) = x^4$



2

Bepaal de graad en de specifieke benaming van de veeltermfunctie.

1 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ ....

2 $f(x) = 5x^3 - 2x$ ....

3 $f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ ....

4 $f(x) = x^2 - 5 - 4x$ ....

5 $f(x) = 5x + 2$ ....

6 $f(x) = 2$ ....

7 $f(x) = -2x^2$ ....

8 $f(x) = x^2 - 3x^6 - x^5 - 4x$ ....

9 $f(x) = -x$ ....

3

Vink elke veeltermfunctie aan.

1 $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ ☐

2 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + 2$ ☐

3 $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$ ☐

4 $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$ ☐

5 $f(x) = \sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}$ ☐

6 $f(x) = \frac{1}{3}x^{-3}$ ☐

7 $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$ ☐

8 $f(x) = -7$ ☐

4

Een vijfdegraadsfunctie kunnen we voorstellen als $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

Bepaal de zes coëfficiënten a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 en a_0 van $f(x) = x^5 - 4x^2 - x$.

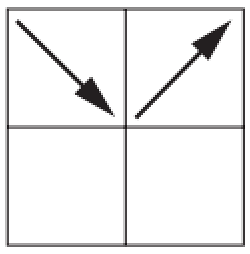
....

5

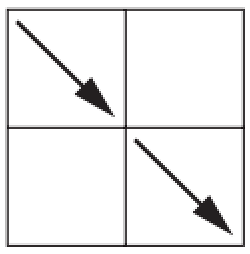
Grafieken van veeltermfuncties lopen van het tweede of het derde kwadrant naar het eerste of het vierde kwadrant.

Verbind elke voorwaarde met een pictogram waaraan de grafiek voldoet.

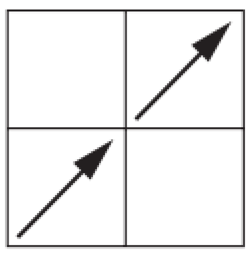
De graad van de functie is even en
de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm is positief. • •



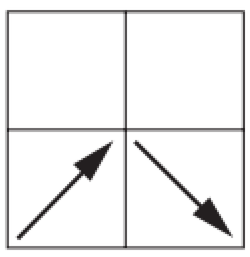
De graad van de functie is even en
de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm is negatief. • •



De graad van de functie is oneven en
de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm is positief. • •

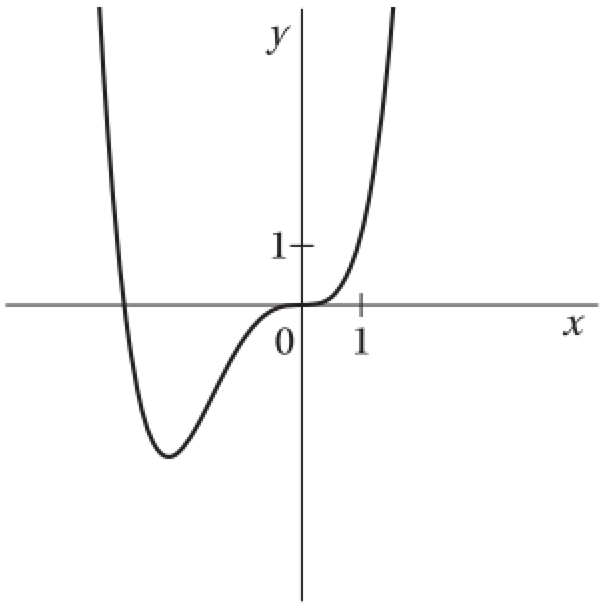


De graad van de functie is oneven en
de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm is negatief. • •



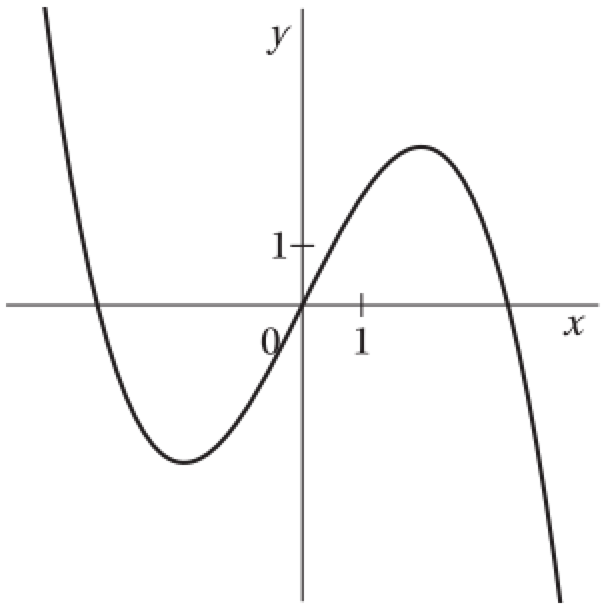
6

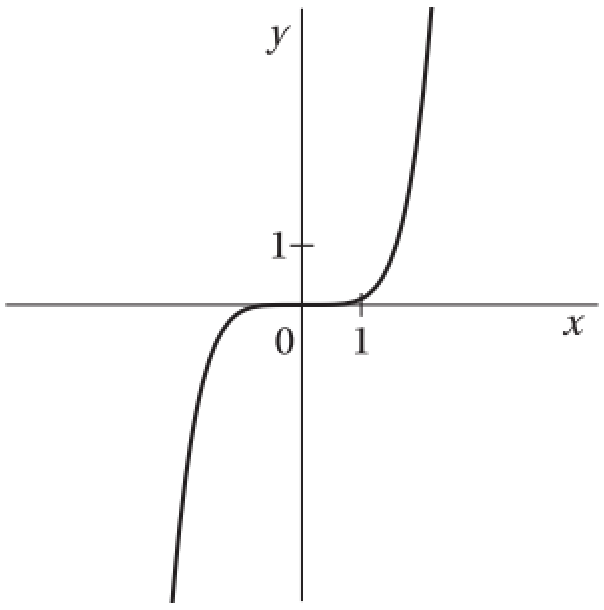
Verbind elke veeltermfunctie met de bijbehorende grafiek.



• $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x$ •

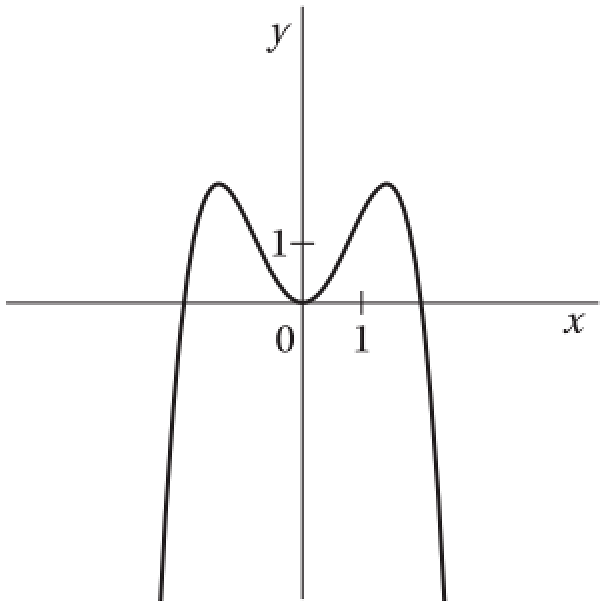
• $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2$ •





• $f(x) = \frac{1}{10}x^5$ •

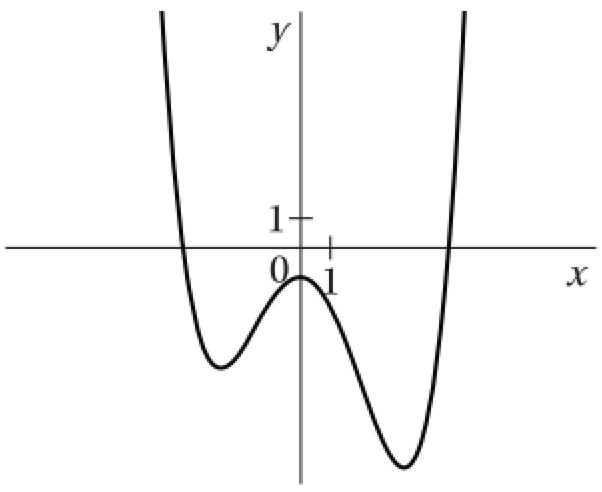
• $f(x) = \frac{3}{10}x^4 + \frac{9}{10}x^3$ •



7

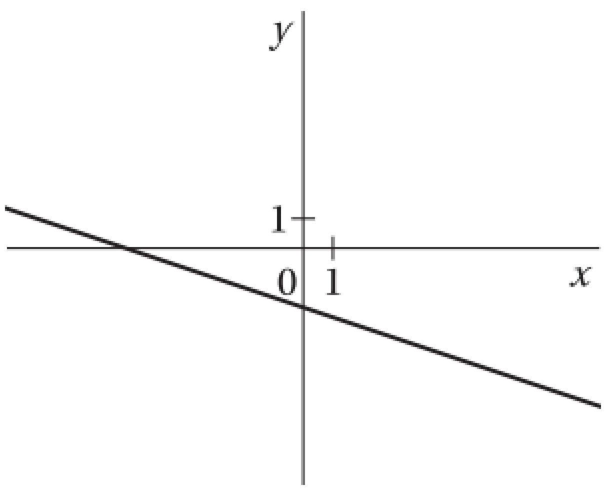
De gemeenschappelijke punten van de grafiek met de assen zijn zichtbaar. Vink elke grafiek van een veeltermfunctie aan.

1



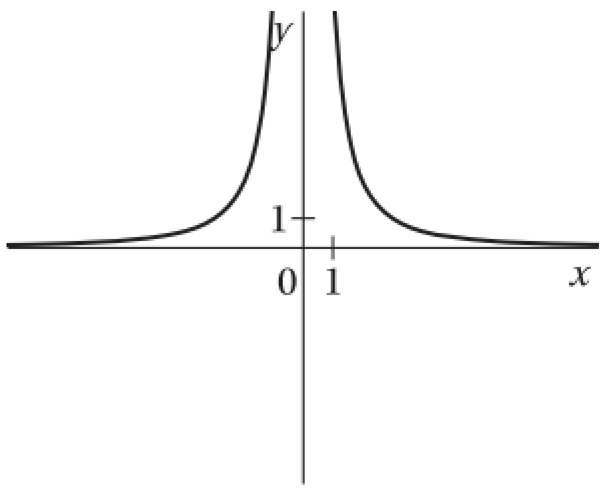
☐

2



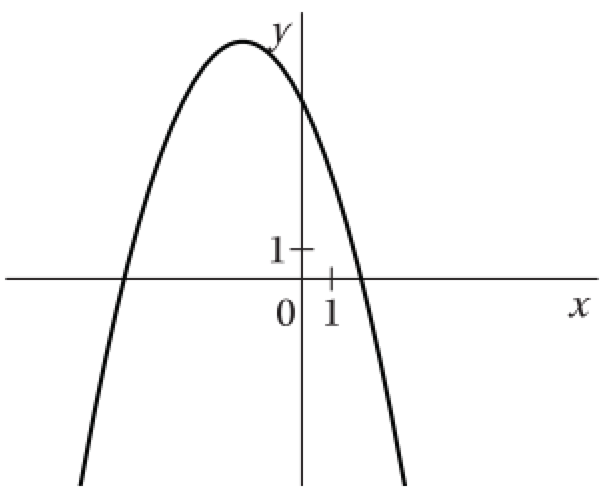
☐

3



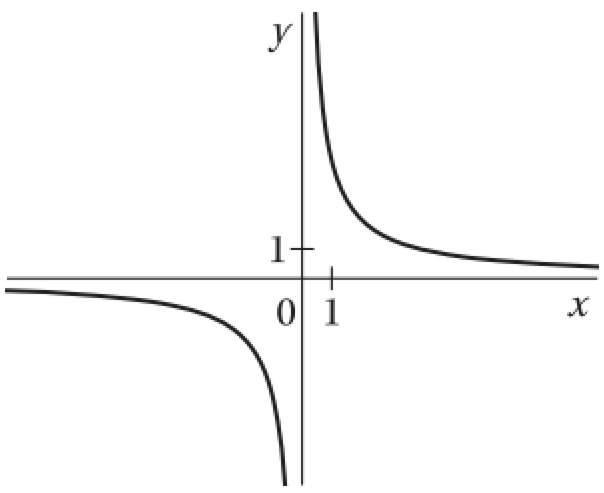
☐

4



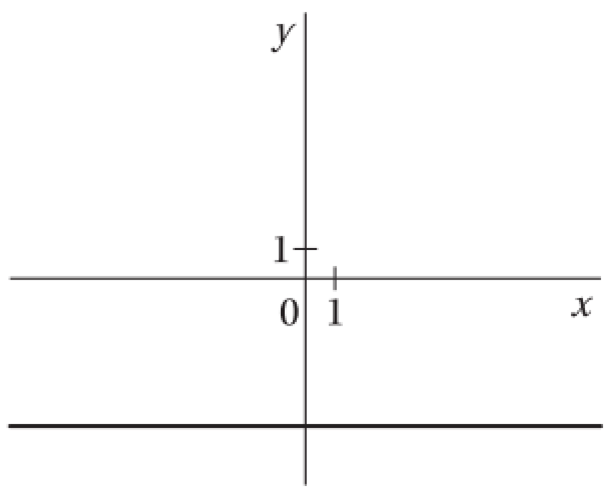
☐

5



☐

6



☐

Domein en bereik van een functie bepalen

Het **domein** van een functie f is de verzameling van alle reële getallen waarvoor we de functiewaarde kunnen berekenen.

We noteren: $\text{dom}\, f$

Het **bereik** van een functie f is de verzameling van alle functiewaarden.

We noteren: $\text{ber}\, f$

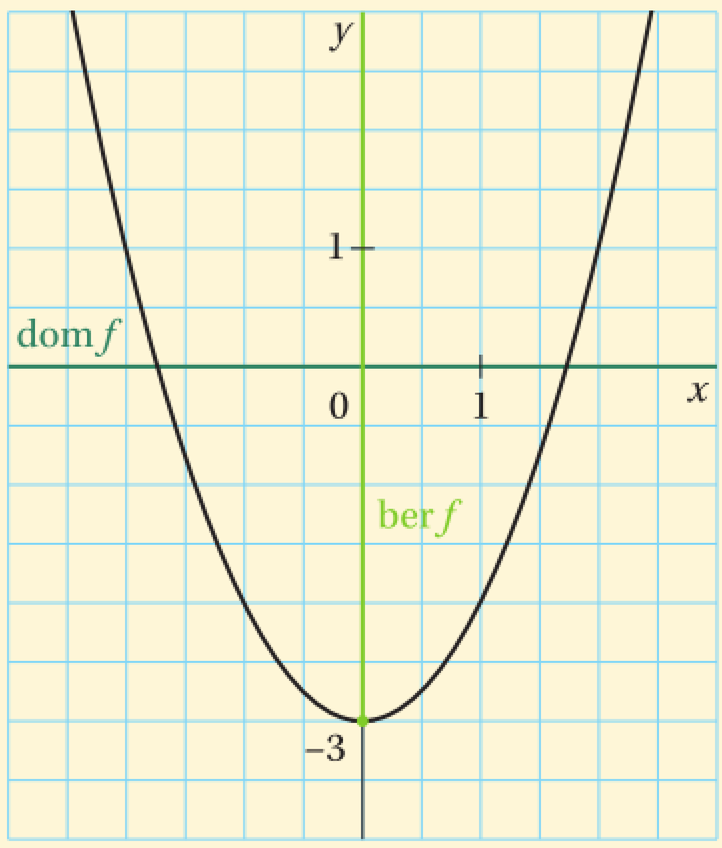
Voorbeeld

We bepalen het domein en het bereik van de functie $f(x) = x^2 - 3$.

De grafiek is een parabool.

We kunnen de functiewaarde in elk reëel getal berekenen: $\text{dom}\, f = \mathbb{R}$.

Elke functiewaarde is groter dan of gelijk aan -3: $\text{ber}\, f = [-3, +\infty[$.



Het domein van de functie f lezen we af op de x-as en het bereik op de y-as.

Werkdomein van een functie

Bij praktische problemen werken we binnen een vooraf bepaald domein. Dit noemen we het **werkdomein**.

Voorbeeld

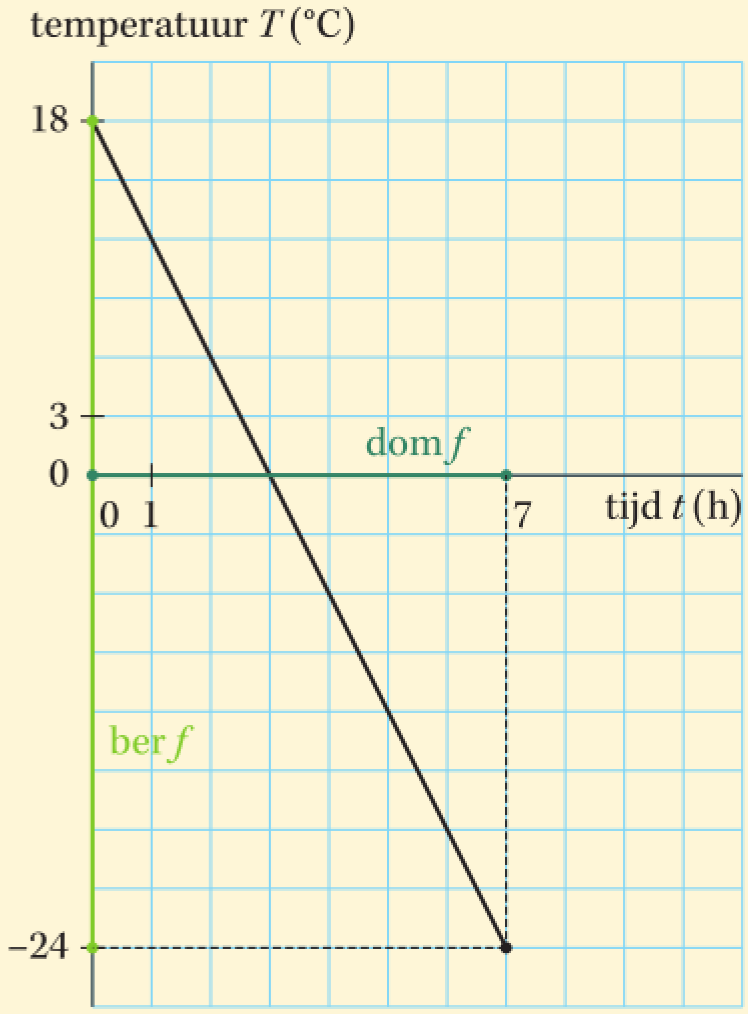
We vriezen een product in. De begintemperatuur is 18°C en elk uur daalt de temperatuur met 6°C. Na 7 uur is de temperatuur –24°C en is het invriezingsproces ten einde.

De temperatuurdaling kunnen we beschrijven met de functie:

$T = -6t + 18$ $\quad$ T: temperatuur in °C $\quad$ t: tijd in uur

$f(t) = -6t + 18$

We bepalen het werkdomein en het bereik van de functie *f*.



dom $f = [0, 7]$

ber $f = [-24, 18]$

8

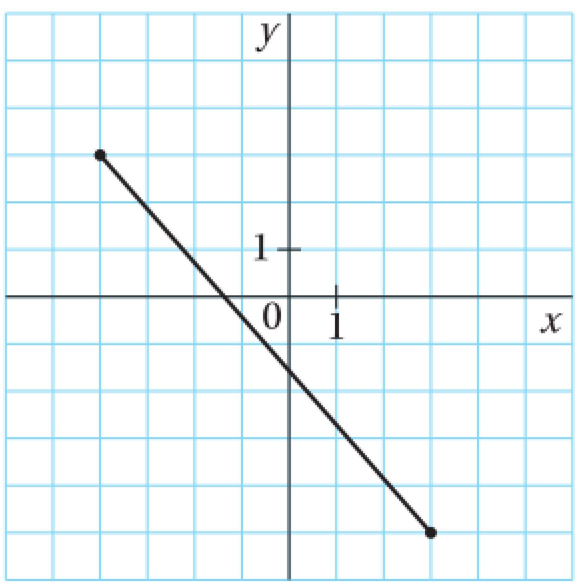
Vink de juiste uitspraken aan.

	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$-1 \in$ dom f				
$0 \in$ dom f				
$1 \in$ ber f				
$-2 \in$ ber f				

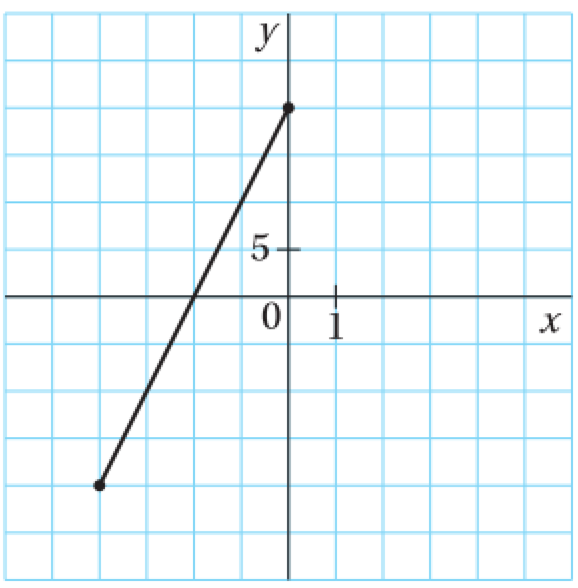
9

Bepaal het domein en het bereik van de functie *f*.

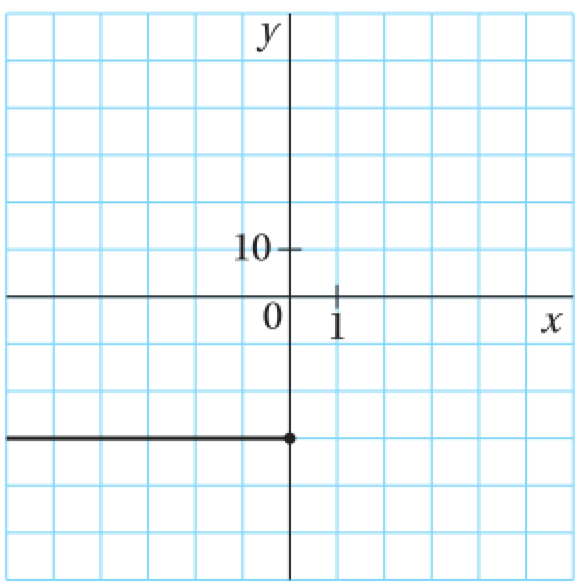
1



2



3



dom f = ...

ber f = ...

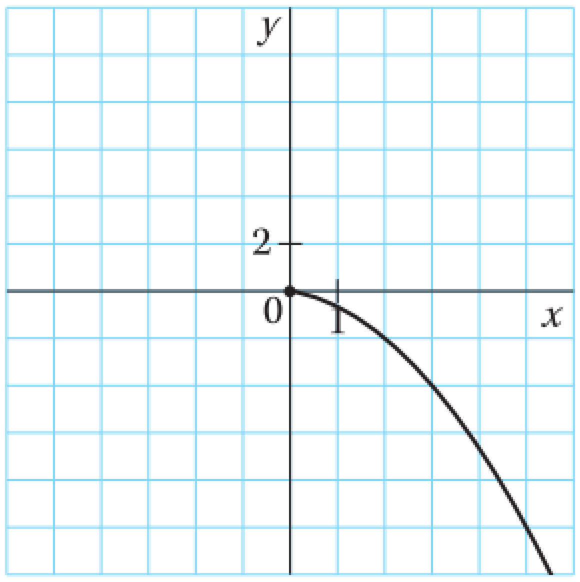
dom f = ...

ber f = ...

dom f = ...

ber f = ...

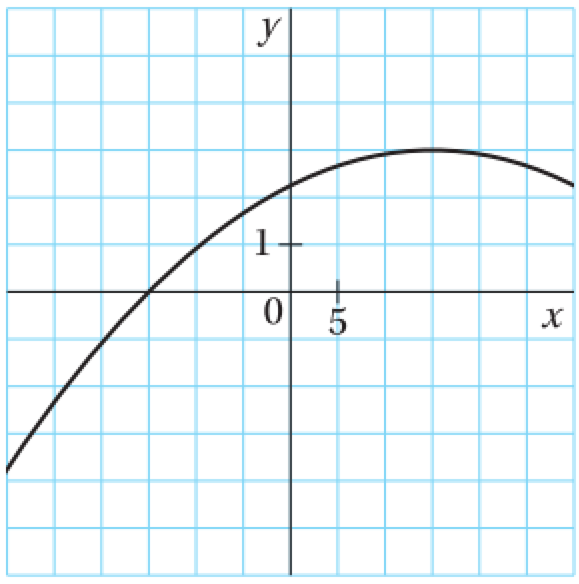
4



dom f = ...

ber f = ...

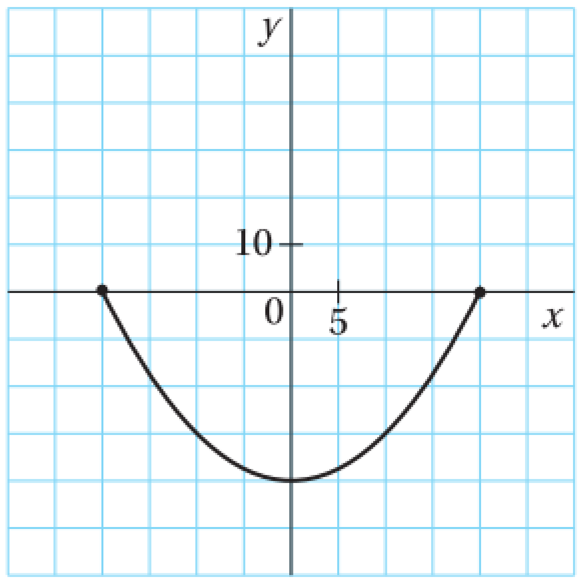
5



dom f = ...

ber f = ...

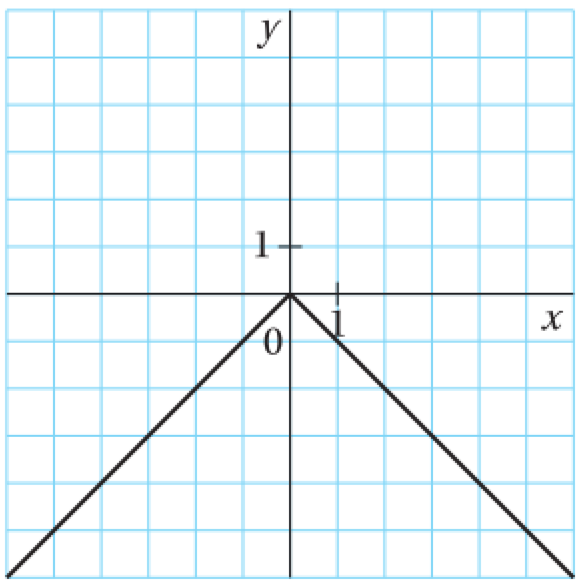
6



dom f = ...

ber f = ...

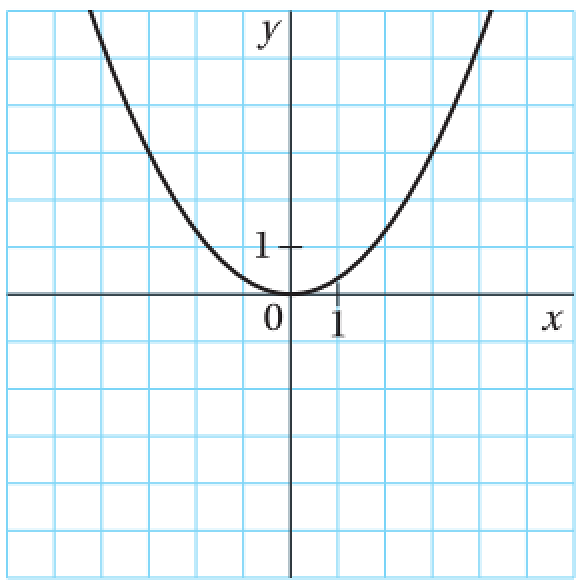
7



dom f = ...

ber f = ...

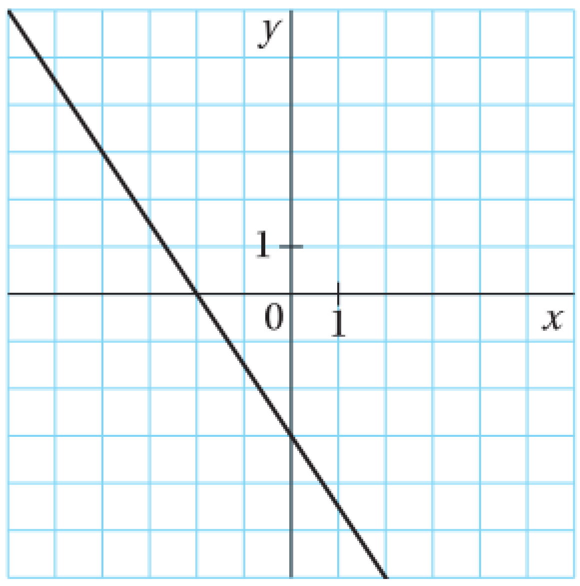
8



dom f = ...

ber f = ...

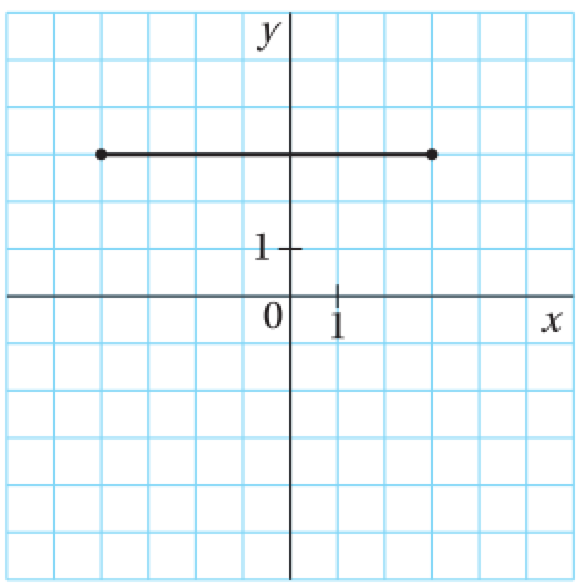
9



dom f = ...

ber f = ...

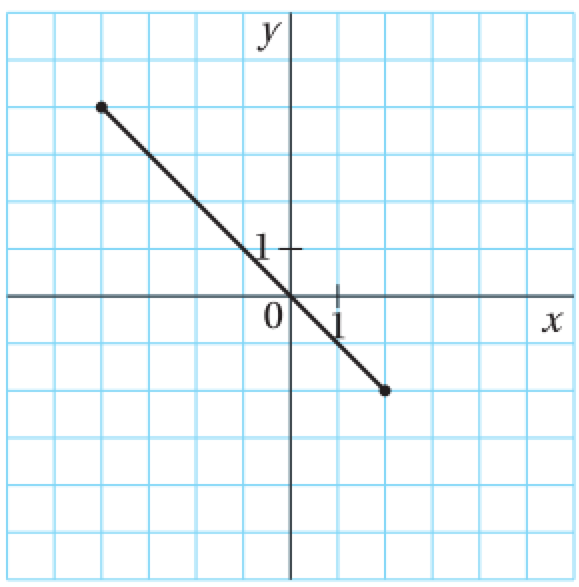
10



dom f = ...

ber f = ...

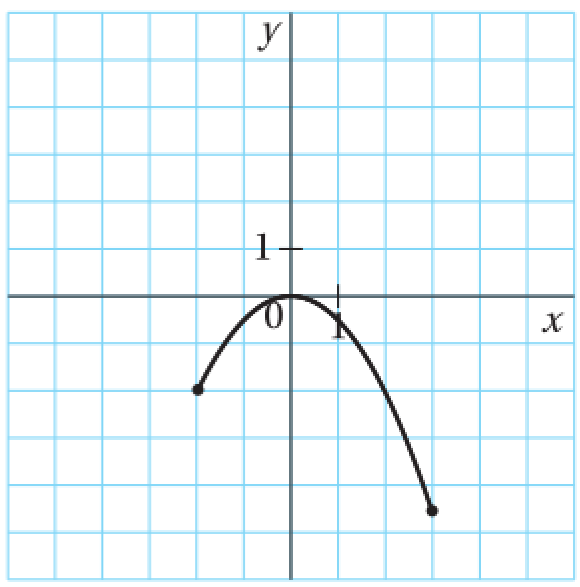
11



dom f = ...

ber f = ...

12



dom f = ...

ber f = ...

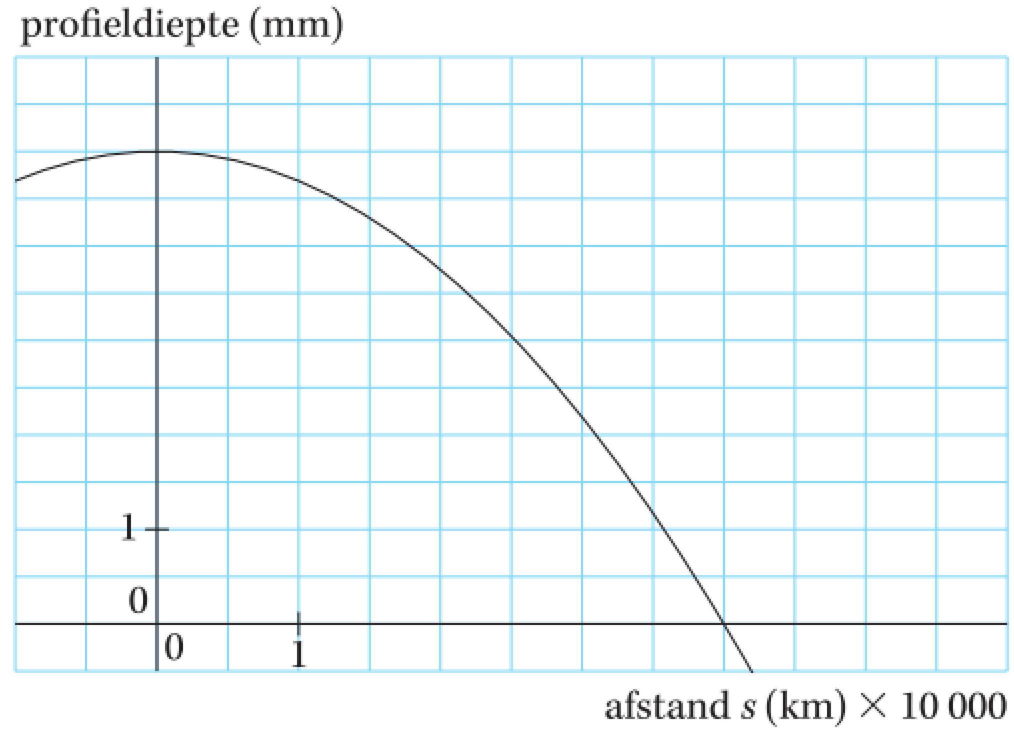
10

Een levensechte situatie is beschreven met de grafiek van een functie.

- Duid op de grafiek het deel aan dat past bij de beschrijving van het te onderzoeken probleem.
- Vul het functievoorschrift aan met het werkdomein.
- Beantwoord de vraag.

1 De profieldiepte van een regenband volgens het aantal gereden kilometers van een auto.

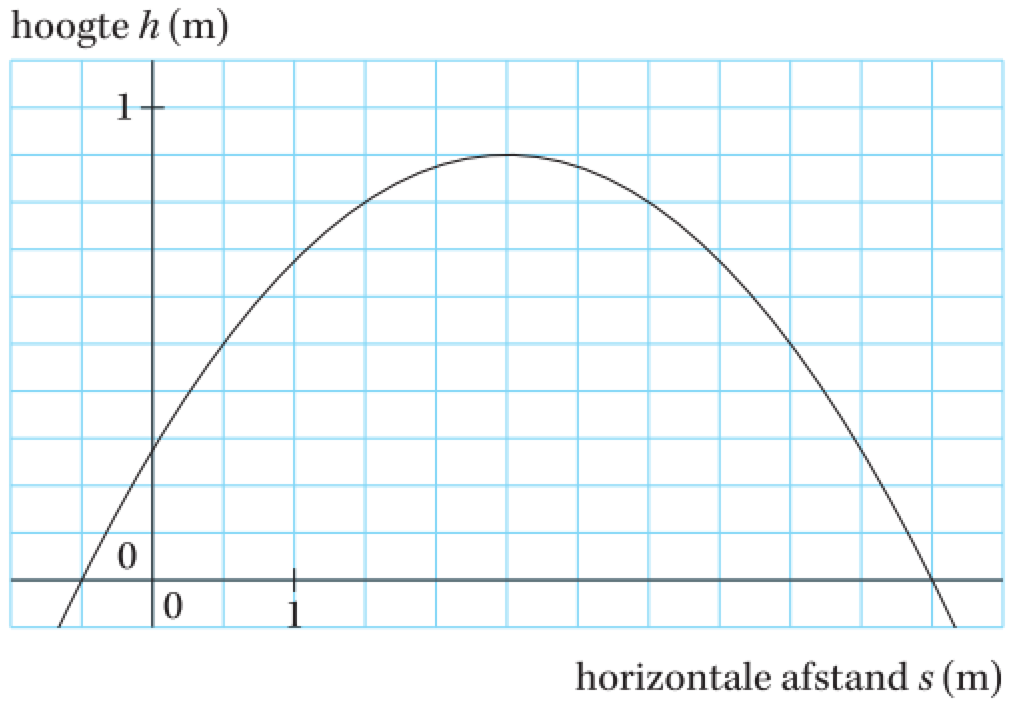
- Grafiek



- Functievoorschrift: $f(s) = 5 - \frac{5}{16}s^2$ met dom f = ...
- Na hoeveel kilometer is de band kaal? ....

2 De sprong van een verspringster die 50 cm voor de balk afzet.

- Grafiek

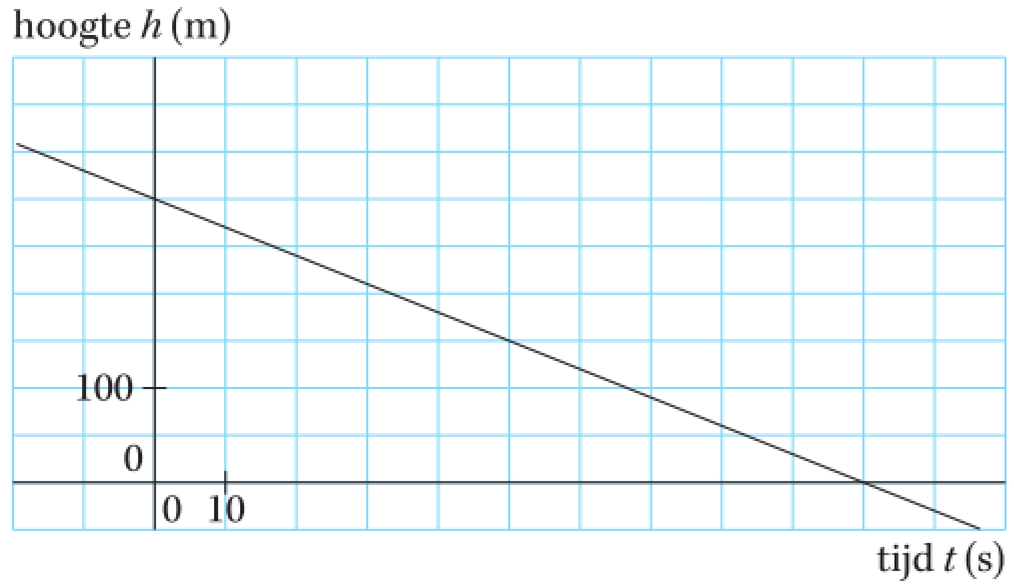


- Functievoorschrift: $f(s) = -\frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{11}{40}$ met dom f = ...
- Na hoeveel meter ten opzichte van de balk bereikt de verspringster haar maximale hoogte?

....

3 Een paraglider die aan 3 m/s daalt.

- Grafiek



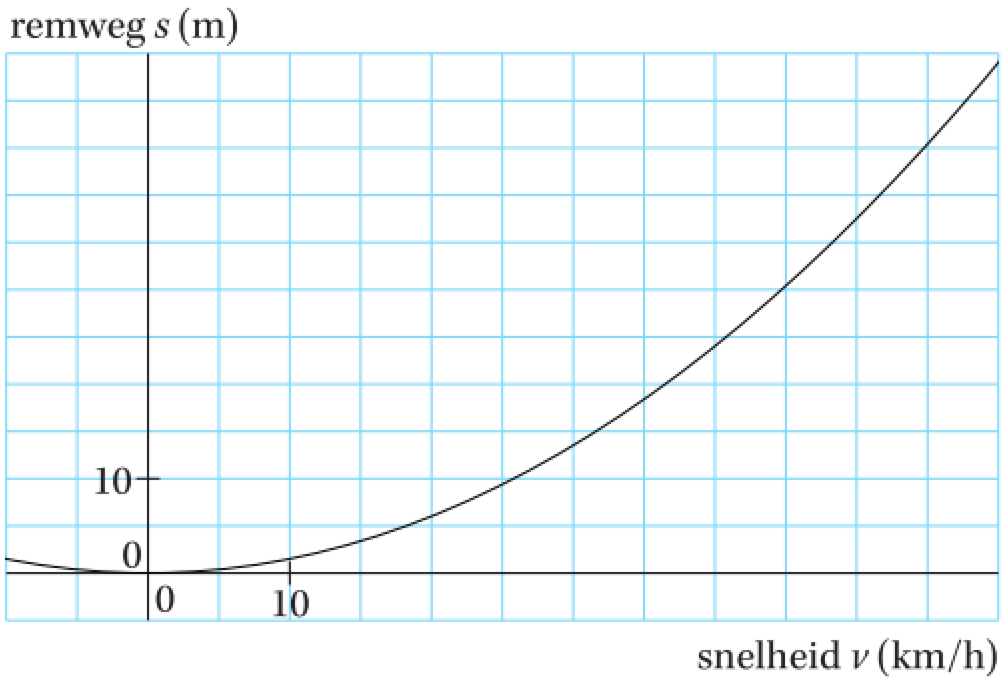
- Functievoorschrift: $f(t) = 300 - 3t$ met dom f = ...

- Wat is de hoogte van de paraglider na 1 minuut?

....

4 De remweg van een auto op een besneeuwd wegdek bij een toename van de snelheid tot en met 50 km/h.

- Grafiek



- Functievoorschrift: $f(v) = 0{,}015v^2$ met dom f = ...

- Hoeveel maal is de remweg langer geworden als we de snelheid van 20 km/h verdubbelen tot 40 km/h?

....

....

Grafieken en tabellen van functies

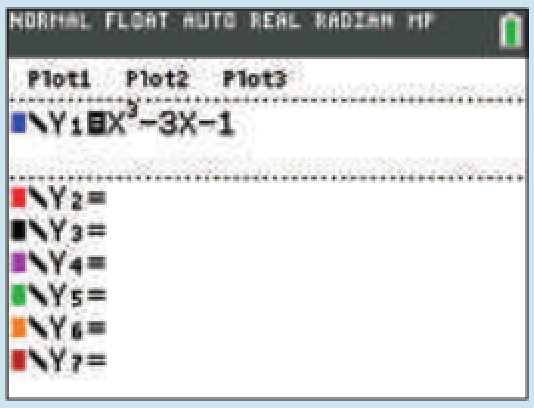
We tekenen de grafiek van de functie $f(x) = x^3 - 3x - 1$ en stellen een tabel op.

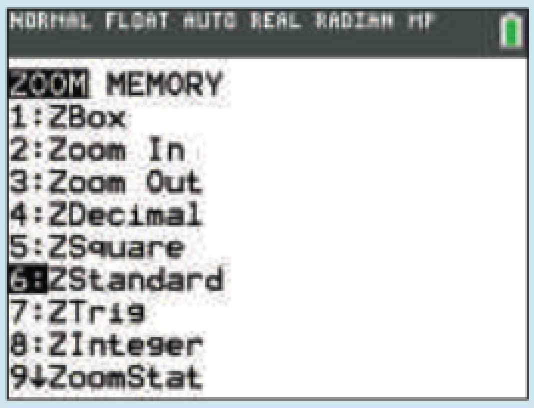
TEXAS INSTRUMENTS

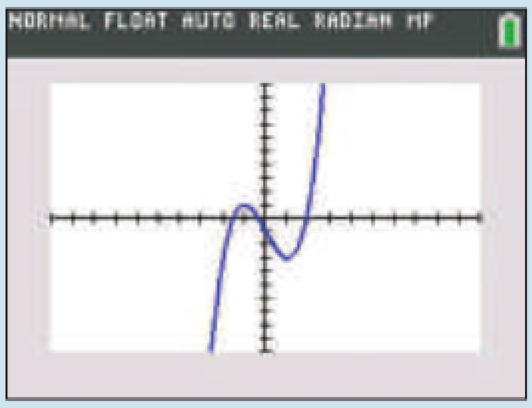
We voeren de formulenotatie $y = x^3 - 3x - 1$ in en geven de grafiek weer in het standaardvenster.

- [Y=] $x^3 - 3x - 1$

  [ZOOM] [6: ZStandard]

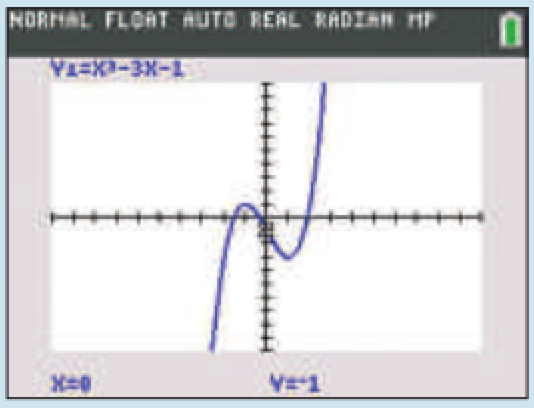


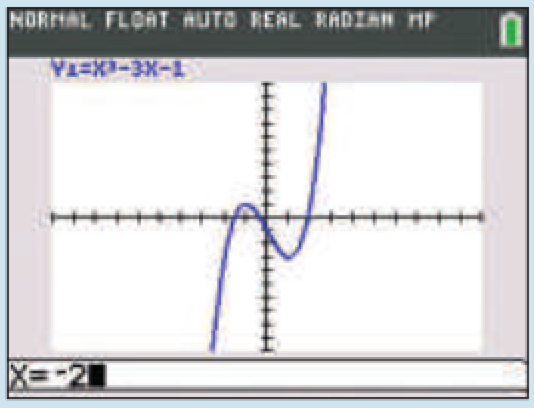


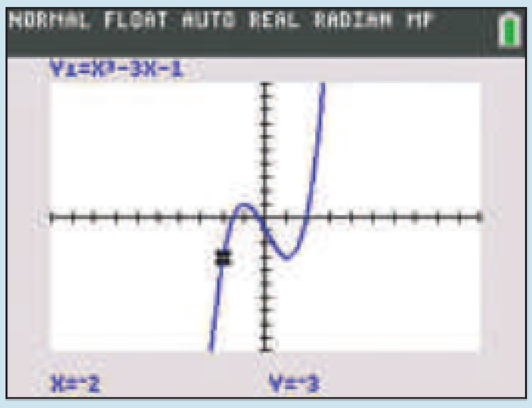


Met de toets TRACE verschijnt een cursor die de grafiek volgt. Onderaan het kijkvenster lezen we de coördinaten van het punt af.

- [TRACE] −2 [ENTER]



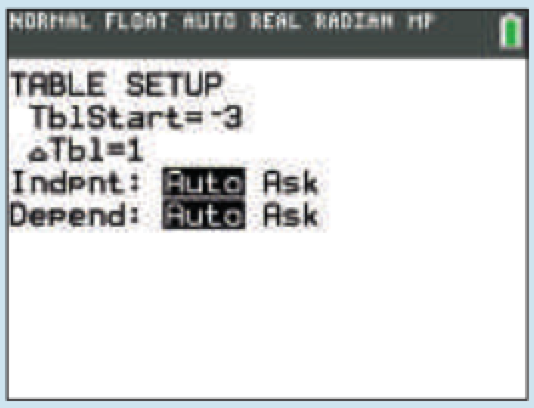


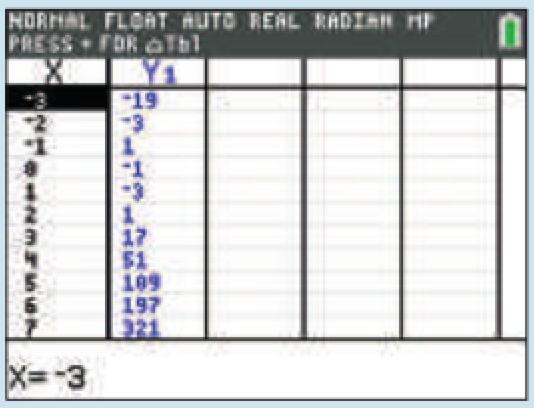


Voor de tabel kiezen we de startwaarde −3 en stellen we de stapgrootte in op 1. We vragen de tabel op.

- [2ND] [TBLSET] −3 [ENTER] 1 [ENTER] [Indpnt: kies Auto] [Depend: kies Auto]

  [2ND] [TABLE]





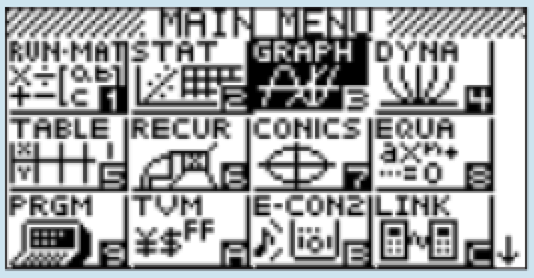


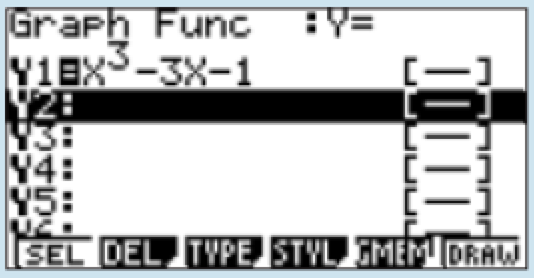
CASIO

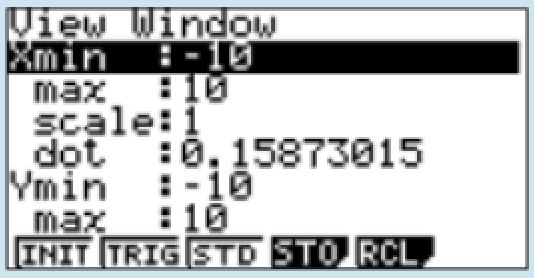
In het menu GRAPH voeren we de formulenotatie $y = x^3 - 3x - 1$ in en geven de grafiek weer in het standaardvenster.

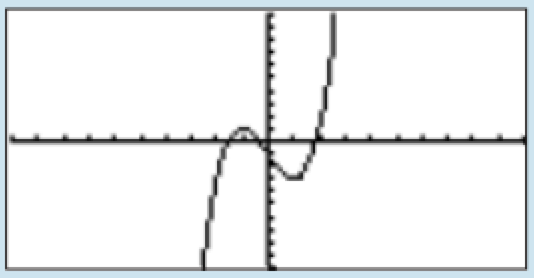
■ [MENU] [3: GRAPH] $x^3 - 3x - 1$ [EXE]

[SHIFT] [F3: V-Window] [F3: STD] [EXIT] [F6: DRAW]



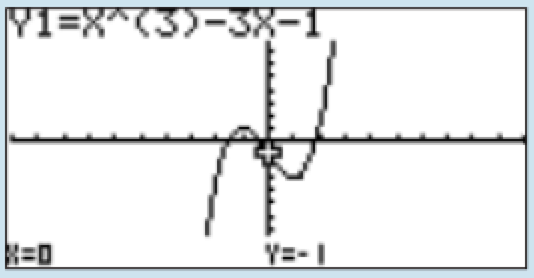


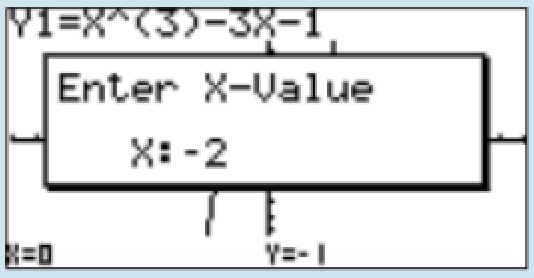


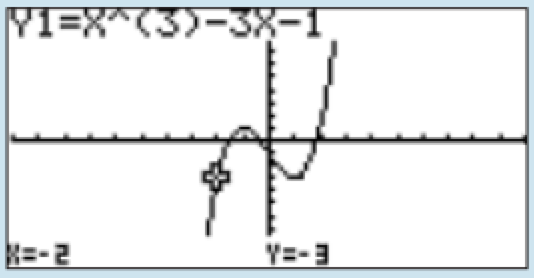


Met de toets Trace verschijnt een cursor die de grafiek volgt. Onderaan het kijkvenster lezen we de coördinaten van het punt af.

■ [SHIFT] [Trace] –2 [EXE]



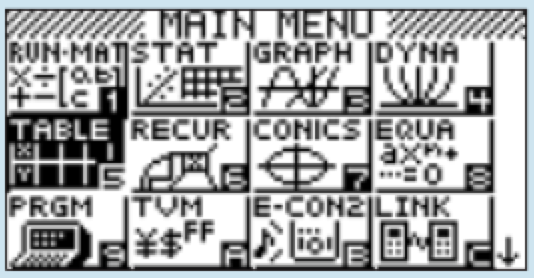


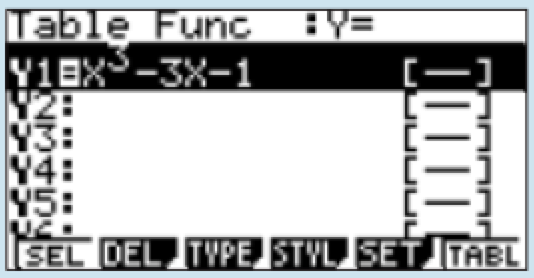


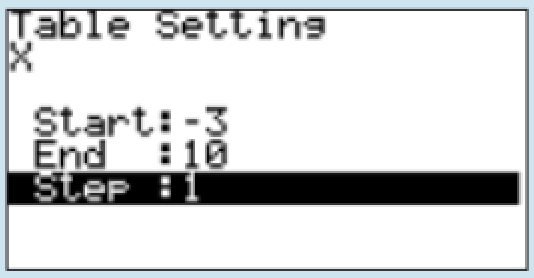
Een tabel verkrijgen we via het menu TABLE. De formule staat ingevuld. Voor de tabel kiezen we de startwaarde –3, de eindwaarde 10 en stellen we de stapgrootte in op 1. We vragen de tabel op.

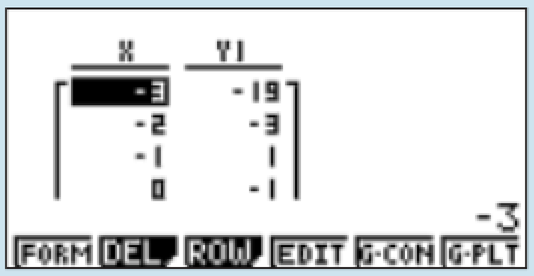
■ [MENU] [5: TABLE] [F5: SET] –3 [EXE] 10 [EXE] 1 [EXE] [EXE]

[F6: TABL]











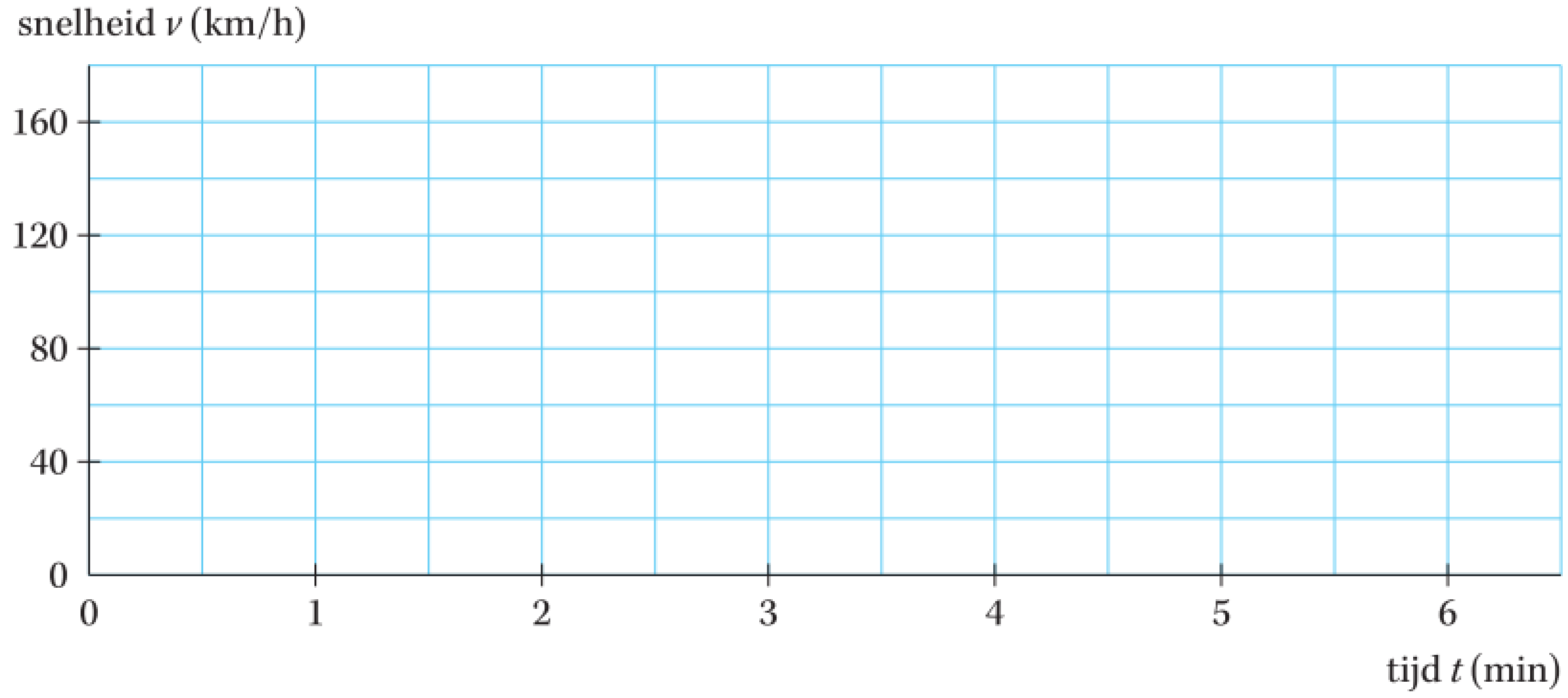
11

Een personenwagen vertrekt uit stilstand en trekt langzaam op. Na enkele minuten ziet de bestuurder in de verte een file. Hij remt lichtjes af en komt tot stilstand. De snelheid van de wagen voldoet in de eerste 6 minuten na het vertrek aan de formule

$v = -3{,}75t^3 + 22{,}5t^2$ v: snelheid in km/h
t: tijd in min

1 Vul de tabel in en teken de grafiek.

tijd t (min)	0	1	2	3	4	5	6
snelheid v (km/h)	....	....	....	....	....	....	....



2 Bepaal het werkdomein en het bereik van deze functie.

....

3 Wat is de snelheid van de bestuurder na anderhalve minuut? ....

4 Wanneer ziet de bestuurder in de verte een file? ....

Wat is zijn snelheid op dat ogenblik? ....

5 Wat is de snelheid van de wagen 15 seconden voor hij tot stilstand komt?

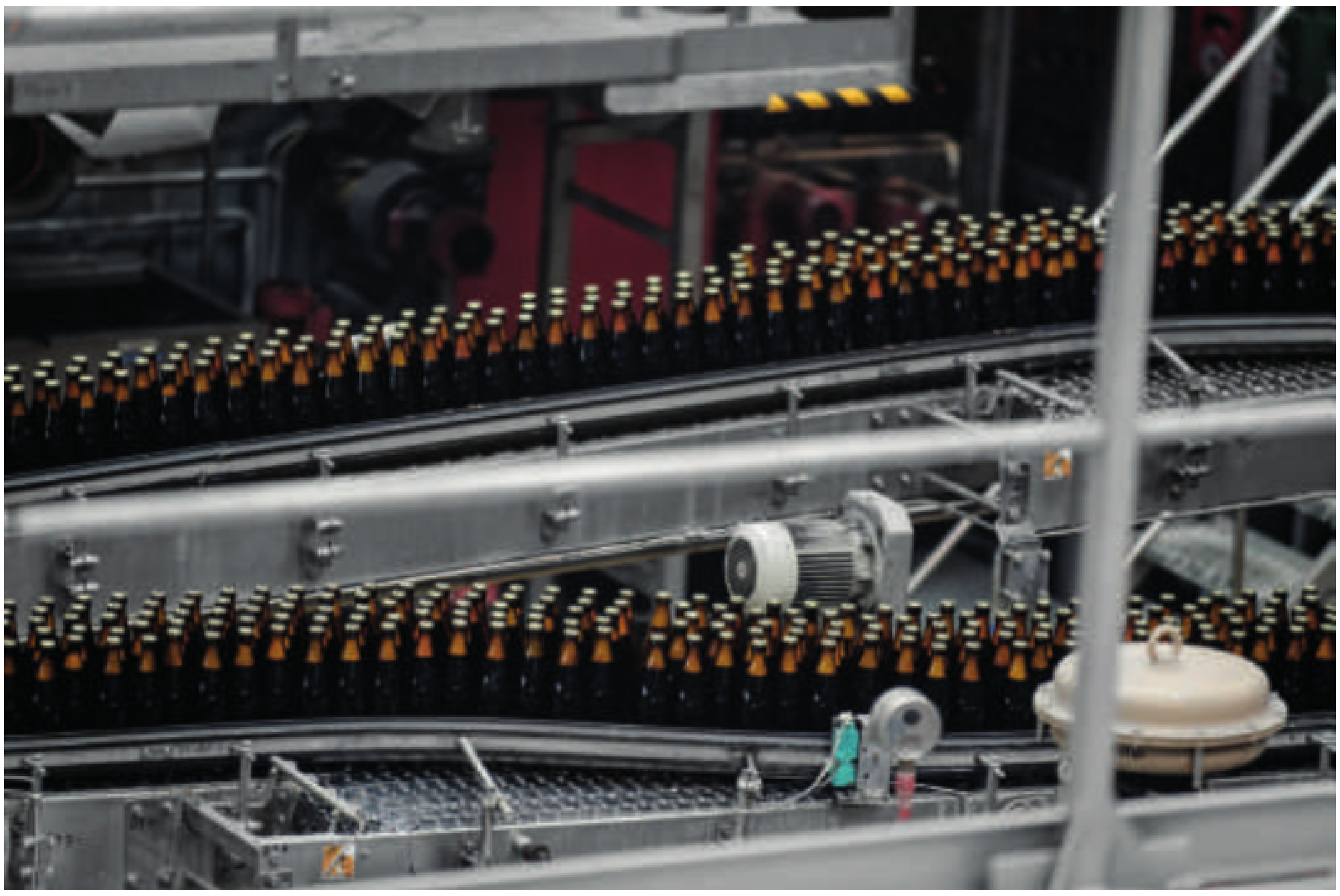
....

....

....

12

De vraag naar artisanaal gebrouwen bier wordt alsmaar groter. Daarom wil een brouwer het aantal bottellijnen van zijn bier uitbreiden.



Een nieuwe bottellijn vergt een zeer grote investering en daarom laat de brouwer een kosten-batenanalyse uitvoeren. Het resultaat van de analyse is wiskundig vertaald in de formule

$O = -1000(n^3 - 5n^2 - 24n)$ O: opbrengst in euro
n: aantal bottellijnen

1 Teken met ICT de opbrengstgrafiek.
Stel het kijkvenster in als volgt: $x_{min} = 0$ $x_{max} = 10$ $y_{min} = 0$ $y_{max} = 150\,000$

2 Vul de tabel aan.

aantal bottellijnen n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
opbrengst O (× 1000 euro)	....	....	....	....	....	....	....	....	....
toename/afname opbrengst (× 1000 euro)		....	....	....	....	....	....	....	....

3 Bij hoeveel bottellijnen is de opbrengst optimaal? ....

4 Bij welk aantal lijnen stijgt de opbrengst het sterkst? ....

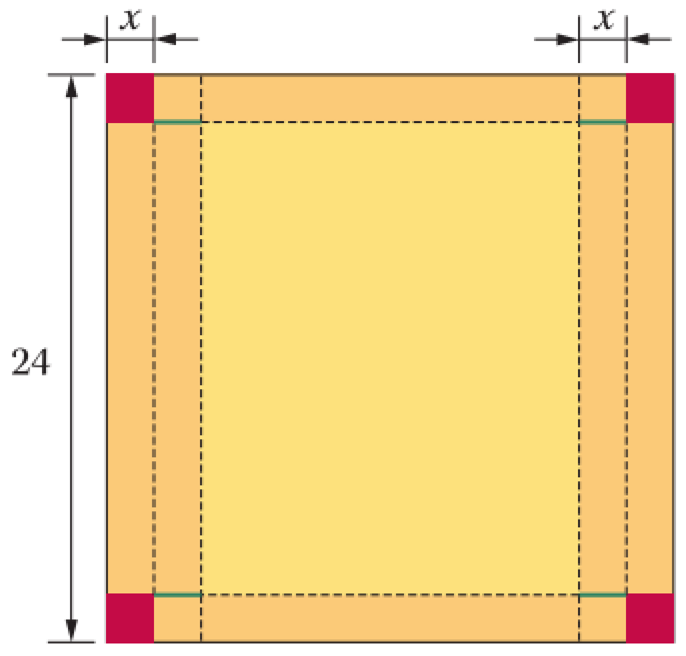
5 Met hoeveel euro stijgt dan de opbrengst? ....

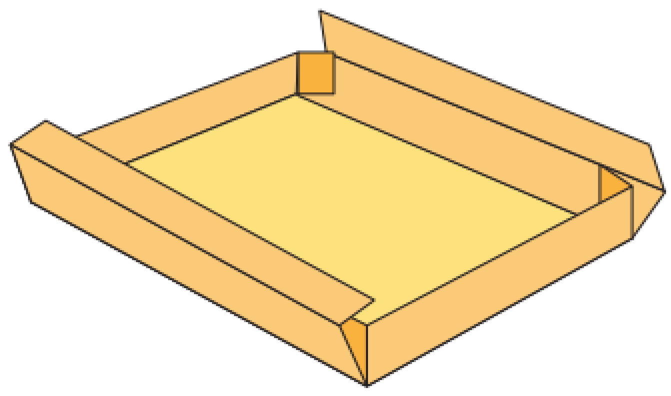
6 Wat is de gemiddelde opbrengst per bottellijn als de fabrikant besluit om met 4 productielijnen te werken?

....

13

Uit een stuk karton van 24 × 24 cm maken we een open doos met vergrendelingslippen. Eerst knippen we op de hoeken de rode vierkanten met zijde x weg. Daarna maken we vier insnijdingen volgens de groene lijntjes en plooien we het karton volgens de stippellijntjes.





1 Het volume V van de doos is een functie van de zijde x van de weggeknipte vierkantjes.
Toon aan dat $V(x) = 8x(6 - x)(12 - x)$.

....

....

....

....

2 Bepaal het werkdomein van de veeltermfunctie V.

....

3 Bepaal met ICT het maximaal volume van de doos.

....

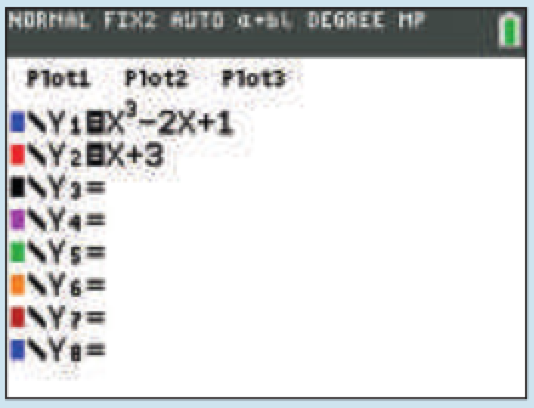
Gemeenschappelijke punten van grafieken bepalen

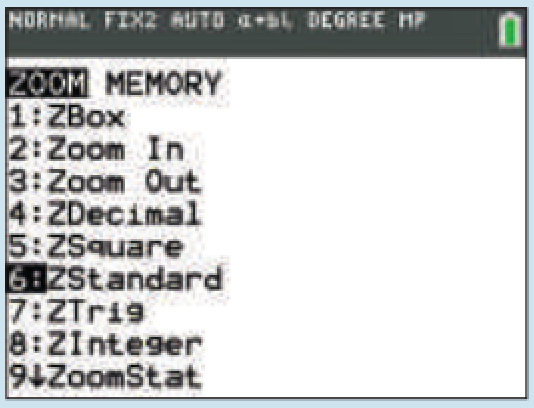
We bepalen de gemeenschappelijke punten van de kromme $y = x^3 - 2x + 1$ en de rechte $y = x + 3$.

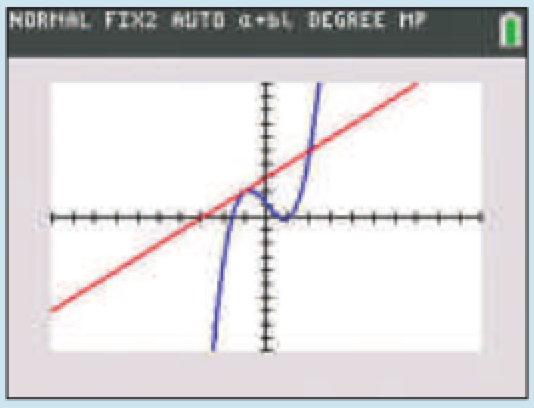
TEXAS INSTRUMENTS

We tekenen de kromme en de rechte in het standaardkijkvenster.

- [Y=] $x^3 - 2x + 1$ [ENTER] $x + 3$ [ZOOM] [6: Zstandard]

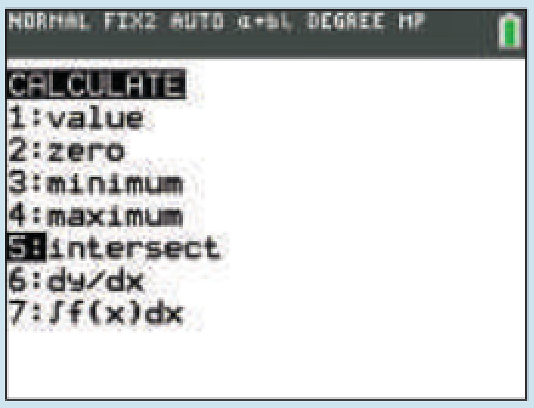


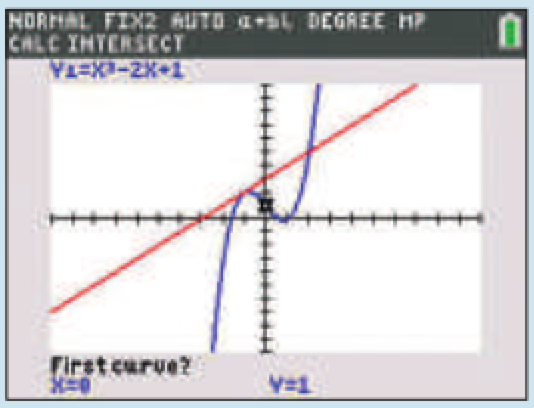


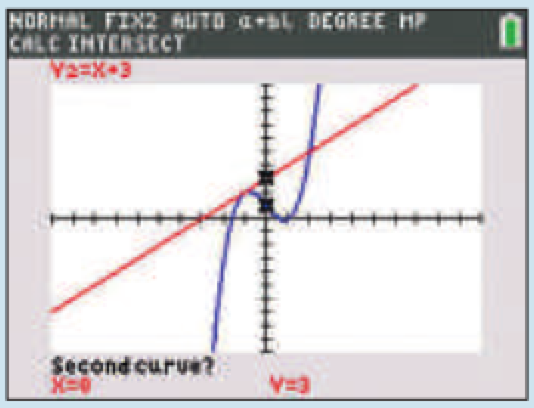


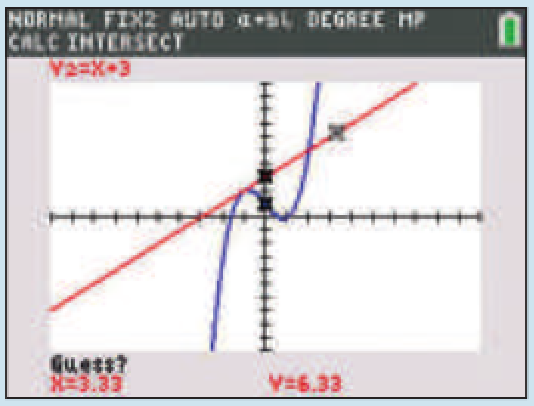
We vermoeden dat de kromme en de rechte een raakpunt en een snijpunt hebben. Het snijpunt bepalen we door de volgcursor in de omgeving van dit snijpunt te plaatsen.

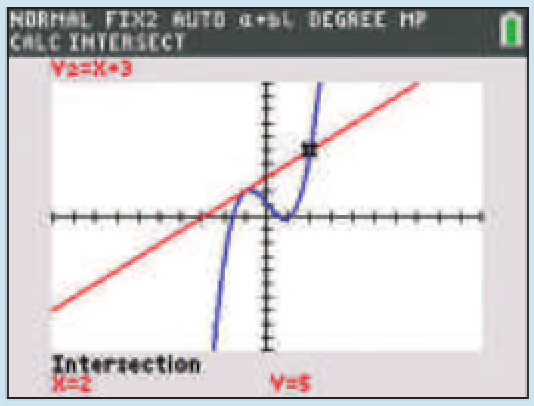
- [2ND] [CALC] [5: Intersect] [ENTER] [ENTER] [▶ : tot rechts van het snijpunt] [ENTER]







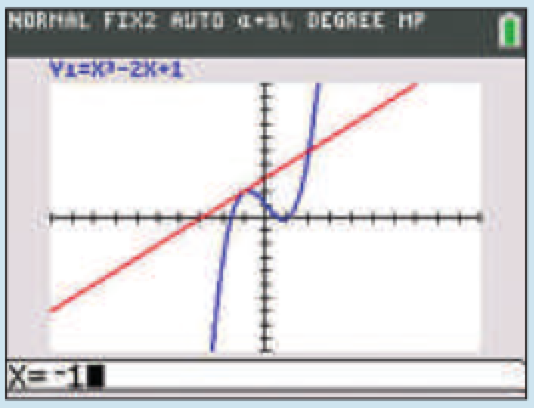


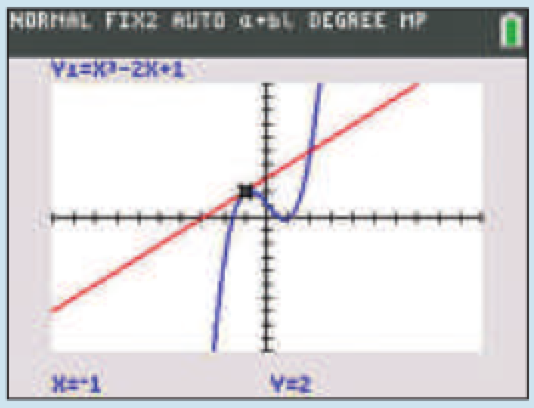


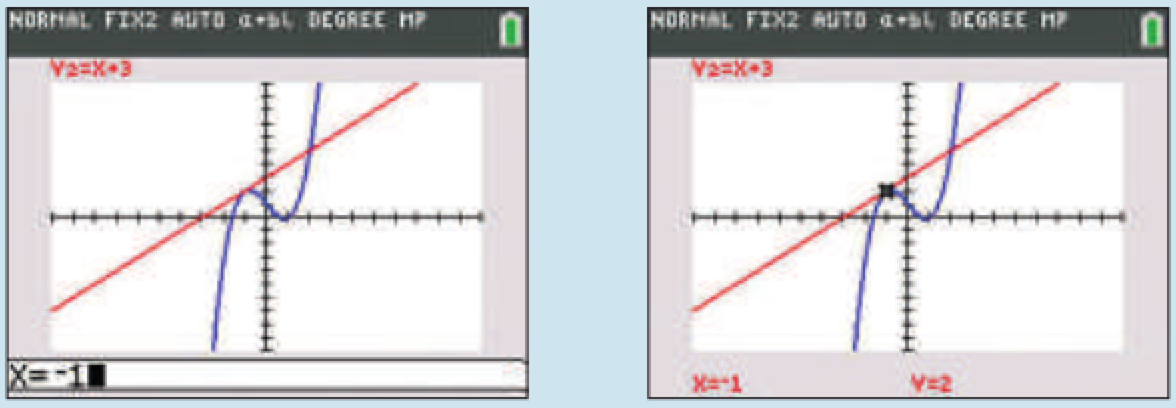
De coördinaten van het snijpunt zijn (2, 5).

De grafieken raken elkaar in het punt (-1, 2). De coördinaten van dit raakpunt kunnen we niet berekenen met de optie Intersect, maar kunnen we controleren met de toets TRACE.

- [TRACE] –1 [ENTER] [TRACE] [▲] -1 [ENTER]



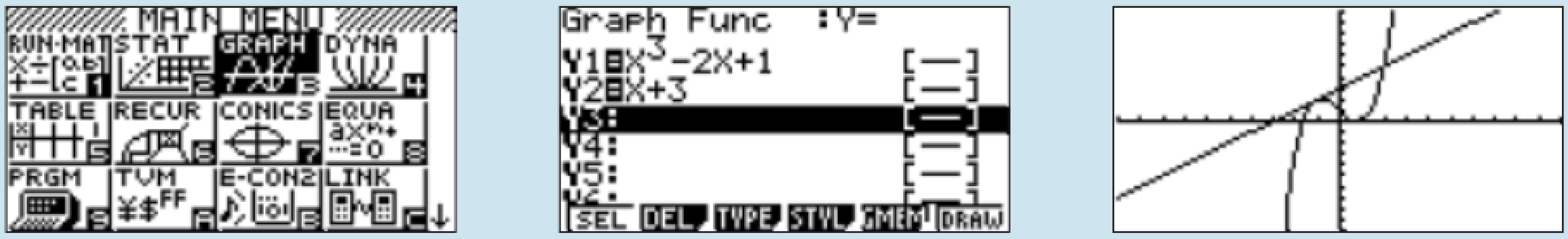




CASIO

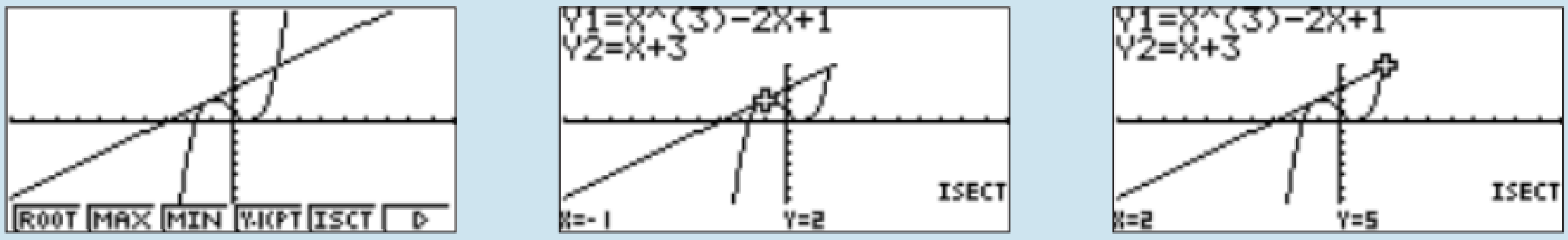
We tekenen de kromme en de rechte in het standaardkijkvenster.

- [MENU] [3: GRAPH] $x^3 - 2x + 1$ [EXE] $x + 3$ [EXE] [SHIFT] [V-Window] [F3 : STD] [EXE] [F6: DRAW]



We bepalen de gemeenschappelijke punten.

- [SHIFT] [G-SOLV] [F5: ISCT] [▶]



De coördinaten van het raakpunt zijn (–1, 2) en van het snijpunt (2, 5).

14

Bepaal de eventuele snijpunten en raakpunten van de grafieken van de veeltermfuncties.

1 $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ en $g(x) = x^3 + 2x + 1$

....

2 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$ en $g(x) = x^2 - 2x - 8$

....

3 $f(x) = x^3 - 3x + 4$ en $g(x) = 2$

....

4 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ en $g(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

....

15

Bereken de x-waarde(n) van de functie waarvoor $f(x)$ gegeven is.

1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$ en $f(x) = 2$ ....

2 $f(x) = x^3 - 3x - 2$ en $f(x) = -4$ ....

3 $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ en $f(x) = -1$ ....

4 $f(x) = x^3 - 7x + 6$ en $f(x) = 12$ ....

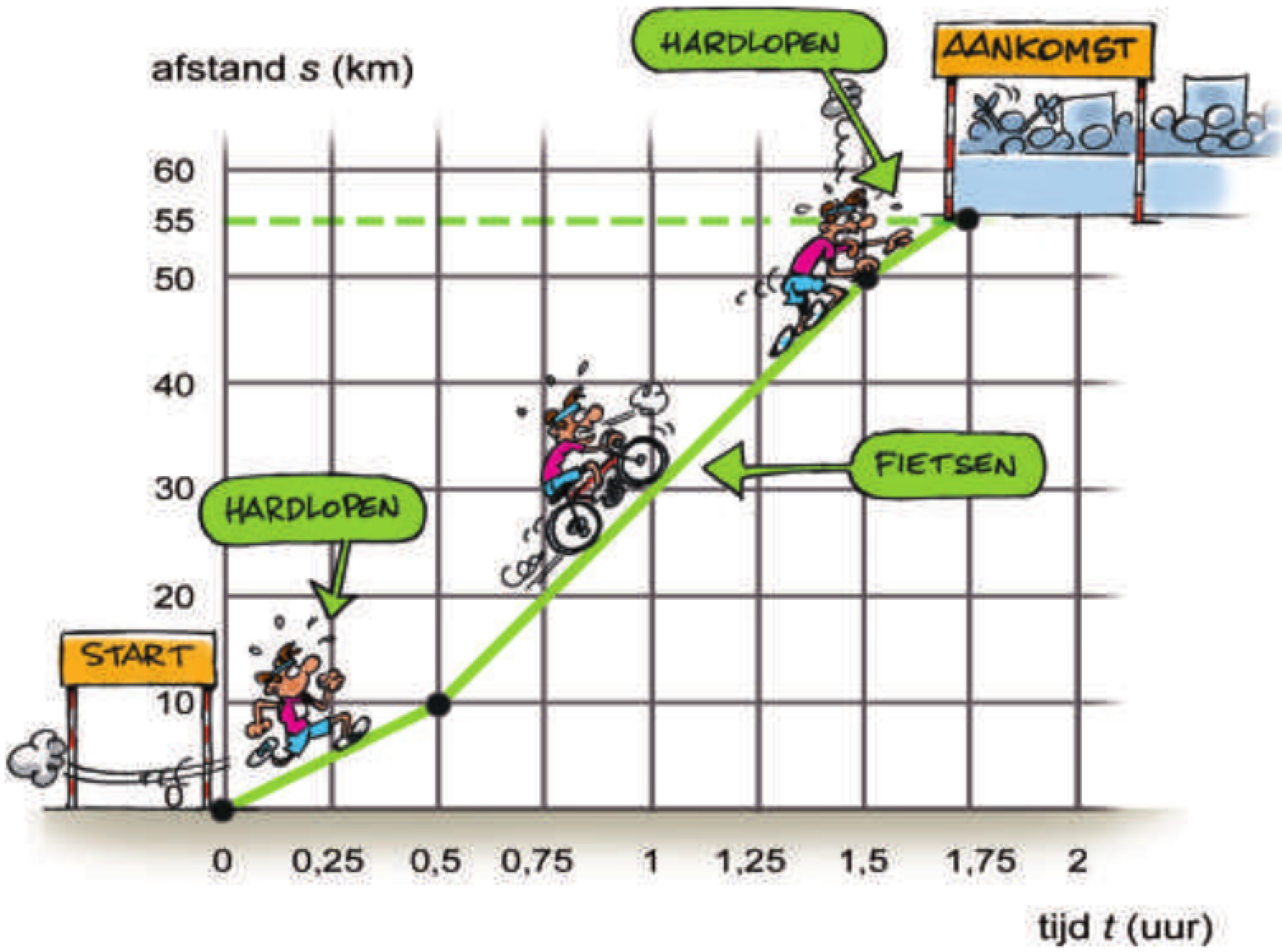
5 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ en $f(x) = 3$ ....

Functies met meervoudig voorschrift

16 Instap

Duatlon bestaat uit twee sporten en drie onderdelen: eerst hardlopen, dan fietsen en opnieuw hardlopen. De kwartduatlon bestaat meestal uit 10 km lopen, 40 km fietsen en 5 km lopen.

Na deelname aan een duatlon berekent Sam zijn gemiddelde snelheid over elke discipline. Hij liep aan 20 km/h en fietste tegen 40 km/h. Het wedstrijdverloop is voorgesteld met de grafiek die uit drie aaneensluitende lijnstukken bestaat.



Elk lijnstuk is een deel van een rechte. De eerste twee lijnstukken hebben als functievoorschriften:

- deel 1: $f(t) = 20t$ voor $0 \leqslant t \leqslant 0,5$
- deel 2: $f(t) = 40t - 10$ voor $0,5 < t \leqslant 1,5$

1 Bepaal het functievoorschrift van het derde lijnstuk.

....

2 Hoeveel kilometer heeft Sam afgelegd na 6 minuten?

....

En 1 uur later?

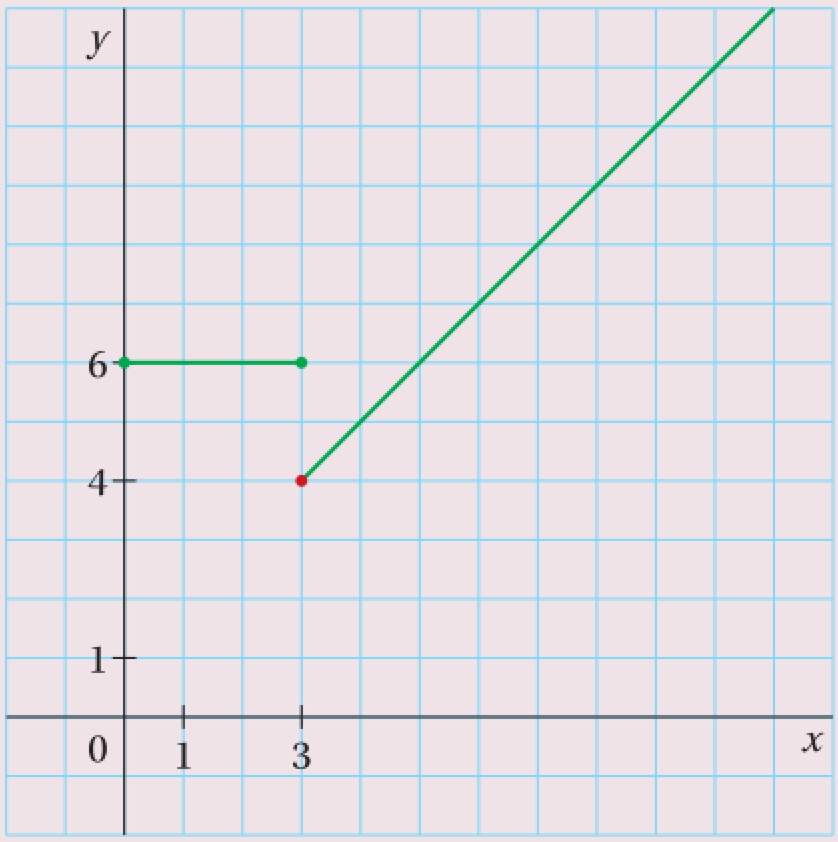
....

3 Wanneer begint Sam voor de tweede maal te lopen?

....

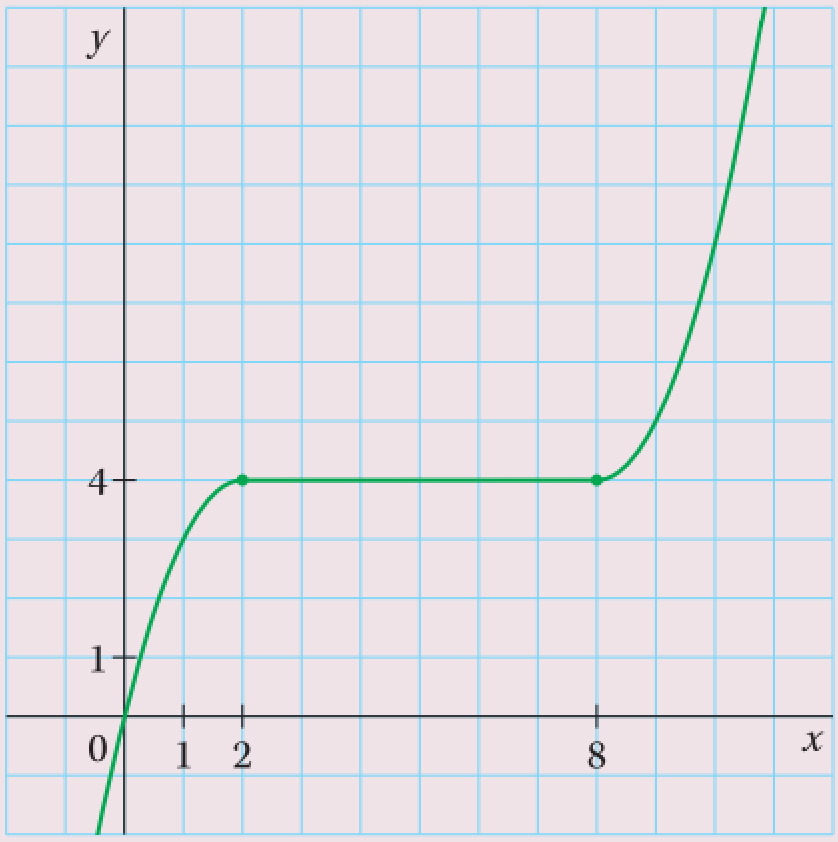
Functies met meervoudig voorschrift

De grafieken zijn opgebouwd uit verschillende grafiekdelen met een eigen voorschrift.



voor $0 \leqslant x \leqslant 3$ geldt $f(x) = 6$

voor $x > 3$ geldt $f(x) = x + 1$



voor $x \leqslant 2$ geldt $g(x) = -(x-2)^2 + 4$

voor $2 < x \leqslant 8$ geldt $g(x) = 4$

voor $x > 8$ geldt $g(x) = (x-8)^2 + 4$

Als we de afzonderlijke voorschriften samenvoegen tot één voorschrift, dan spreken we van een **functie met een meervoudig voorschrift**.

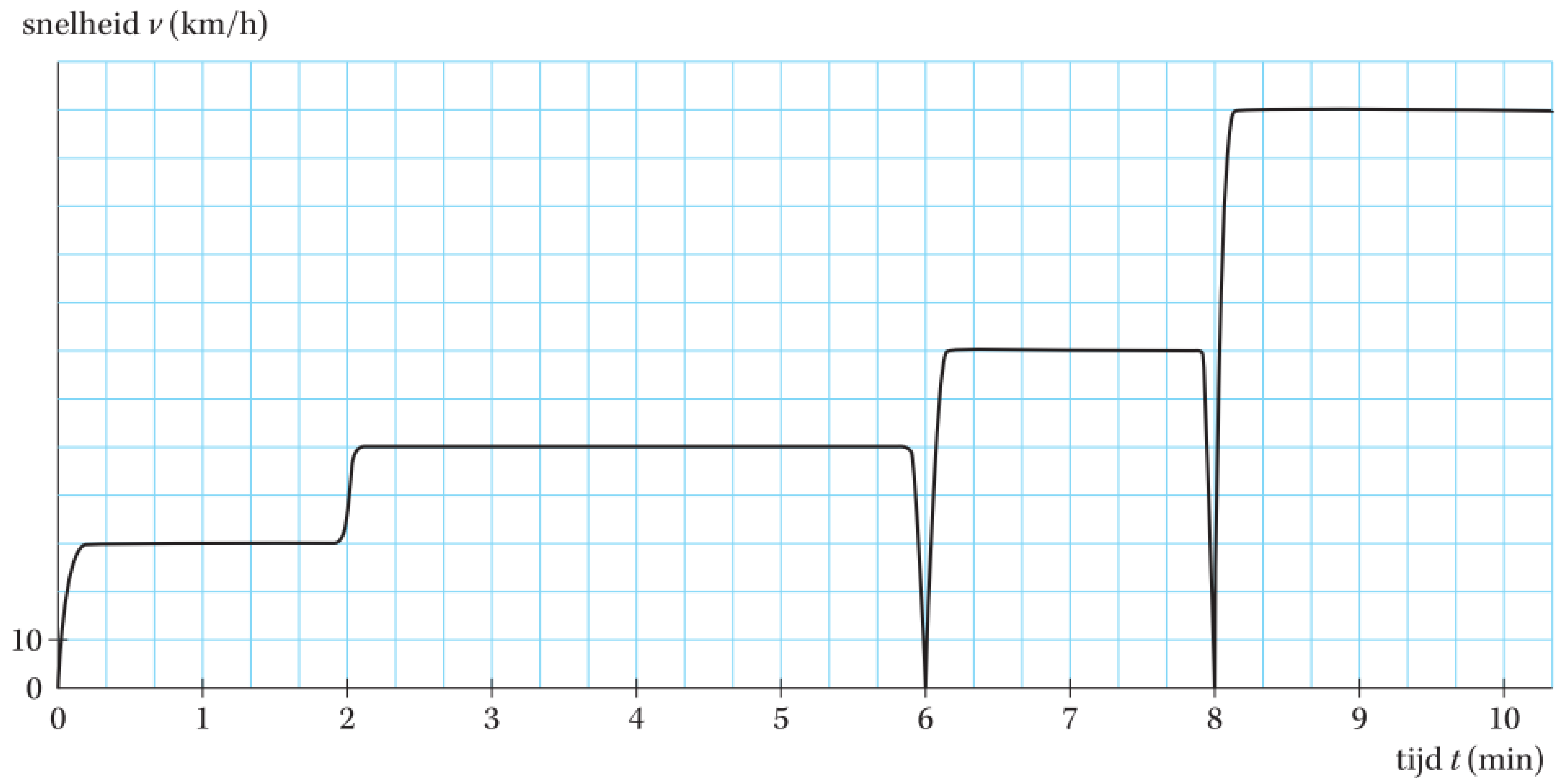
$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{als} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ x + 1 & \text{als} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 4 & \text{als} \quad x \leqslant 2 \\ 4 & \text{als} \quad 2 < x \leqslant 8 \\ (x-8)^2 + 4 & \text{als} \quad x > 8 \end{cases}$$

De functie f heeft een **tweevoudig** voorschrift en de functie g heeft een **drievoudig** voorschrift.

17

De snelheid van een auto bij het verlaten van een stadscentrum is weergegeven met de volgende grafiek. De autobestuurder rijdt overal aan de maximum toegelaten snelheid.



1 Aan welke snelheid rijdt de autobestuurder in het stadscentrum? ....

2 Na hoeveel minuten verlaat hij het stadscentrum? ....

3 Hoelang rijdt de autobestuurder tegen 50 km per uur? ....

4 Wanneer stopt hij voor een verkeerslicht? ....

5 Wat is de afstand tussen de twee verkeerslichten?

....

6 Stel het viervoudig voorschrift op van de grafiek zonder rekening te houden met de versnelling van de auto en de stopplaatsen.

....

....

....

....



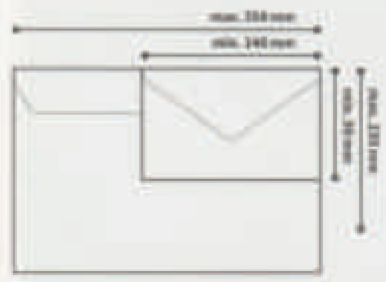
18

Het tarief voor het verzenden van een brief is afhankelijk van het formaat, het gewicht en de bestemming. De tarieven voor een niet-genormaliseerde zending in 2014 lezen we af in de tabel.

NIET-GENORMALISEERD FORMAAT

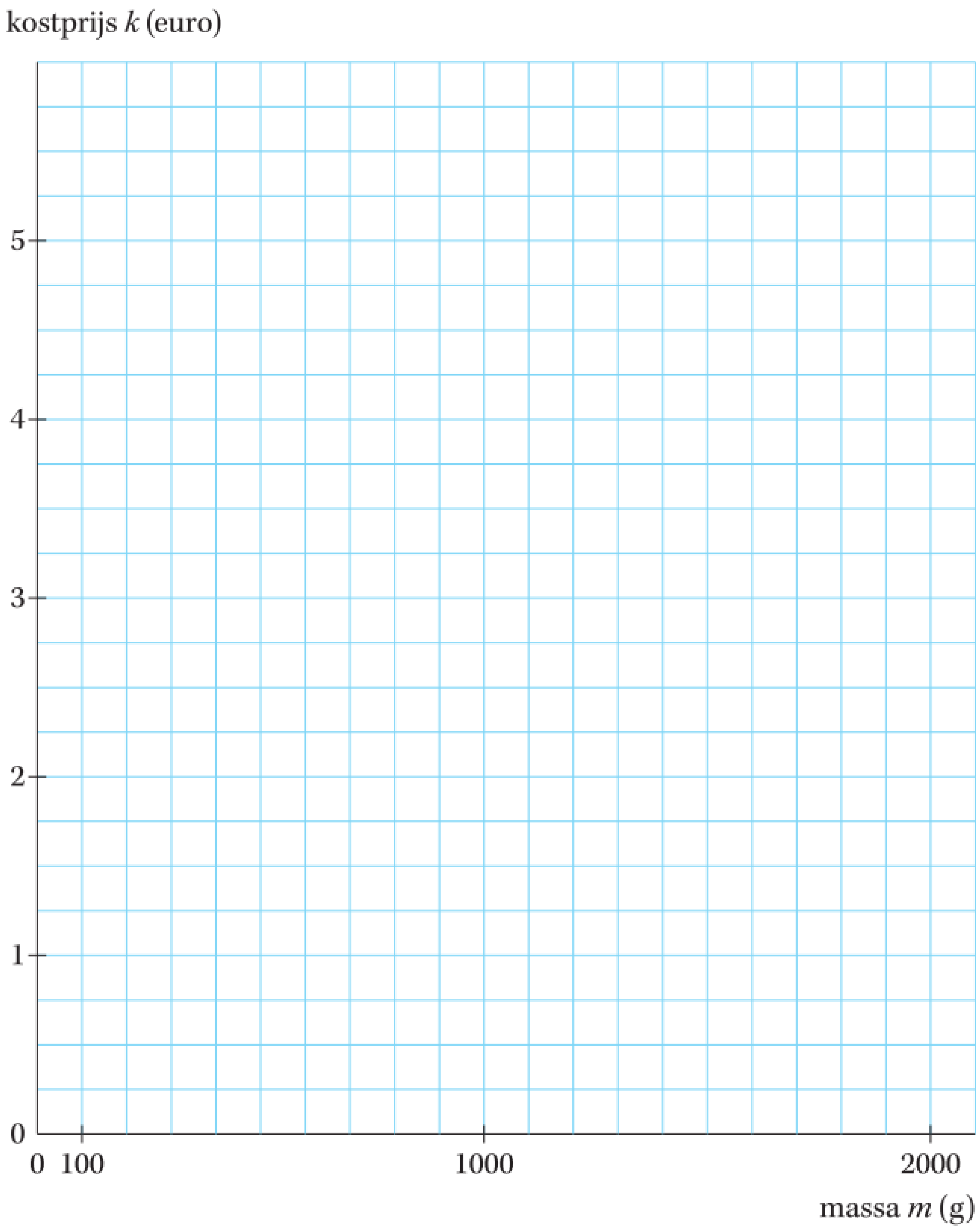
	0-100g	+100-350g	+350g-1kg	+1-2kg
België	€ 1,54	€ 2,31	€ 3,85	€ 5,39
Europa	€ 3,51	€ 7,02	€ 11,70	€ 23,40
Rest van de wereld	€ 4,17	€ 8,34	€ 19,46	€ 38,92

NIET-GENORMALISEERD FORMAAT BRIEF



- Minimumafmetingen: **90 x 140 mm**
- Maximumafmetingen: **230 x 350 mm**
- Maximumdikte: **30 mm**
- Maximumgewicht: **2 kg**
- **Vierkante zendingen = niet-genormaliseerd min. 140 x 140 mm**

1 Teken de grafiek van de posttarieven voor een niet-genormaliseerde zending in België.



2 Stel het meervoudig voorschrift op van de grafiek.

....

....

....

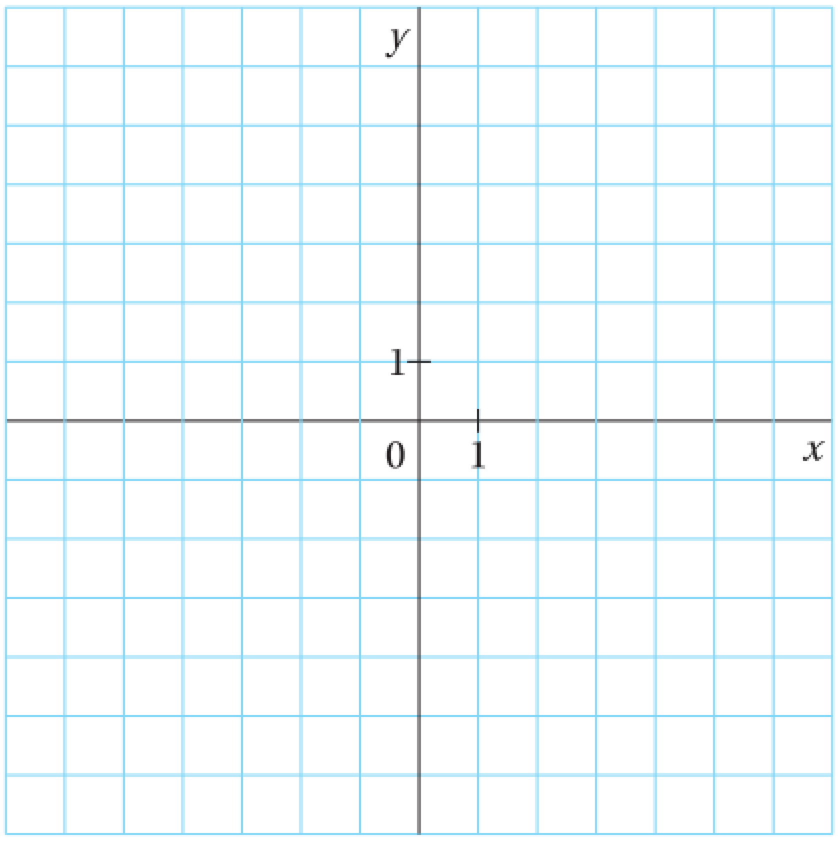
....

19

Schets de grafiek van de functie f.

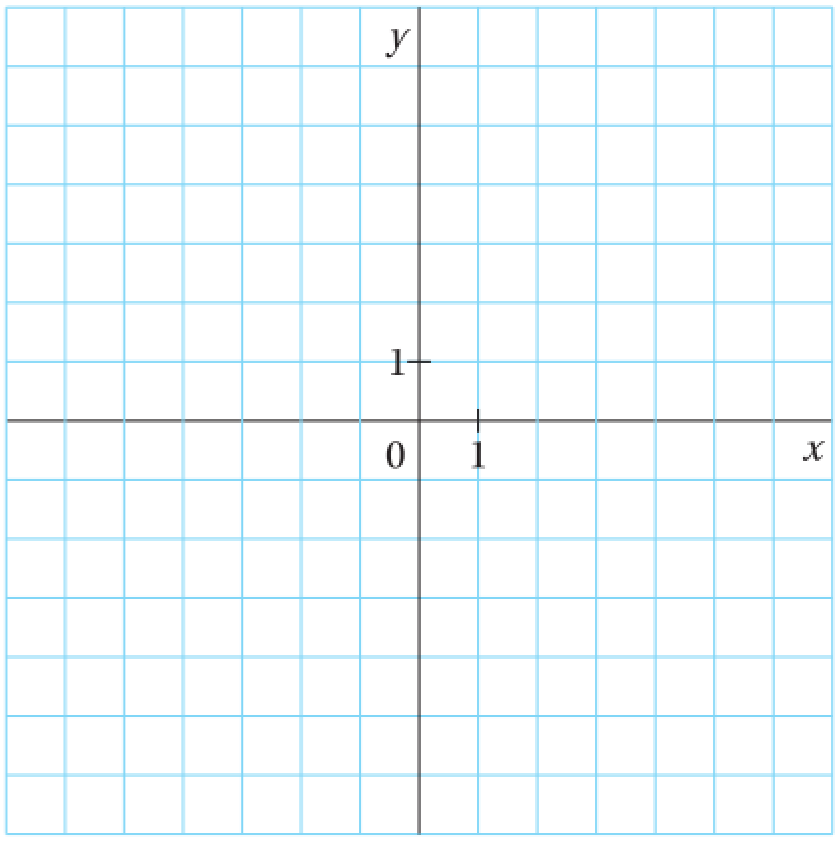
1 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 - 2 & \text{als } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{als } x > 0 \end{cases}$

x	–4	–2	0	2	4
$f(x)$	....	....	....	....	....



2 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 5 & \text{als } x < 0 \\ -\frac{1}{8}x^2 + 5 & \text{als } x \geqslant 0 \end{cases}$

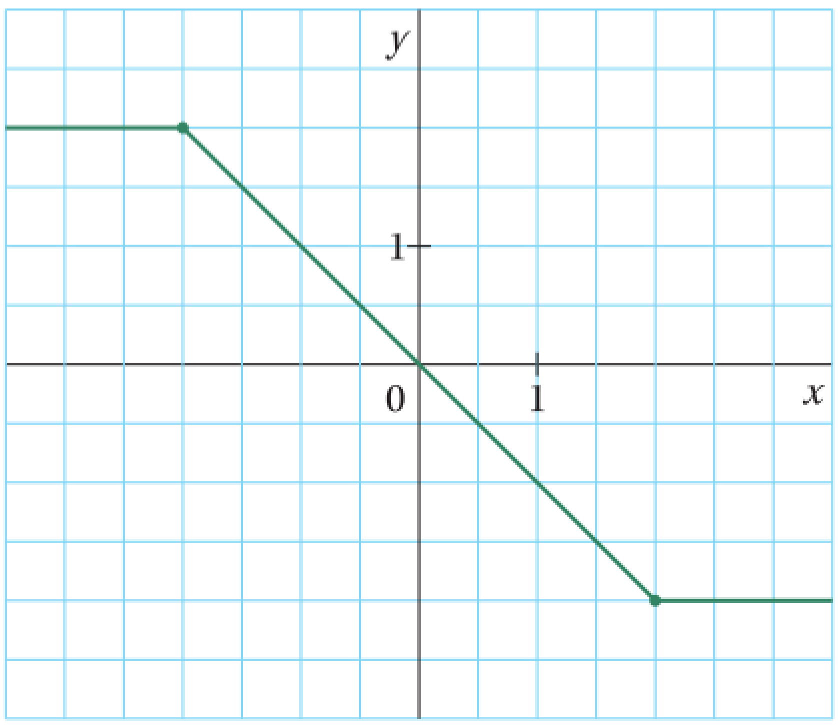
x	–4	–2	0	2	4
$f(x)$	....	....	....	....	....



20

Bepaal het voorschrift bij de grafiek.

1

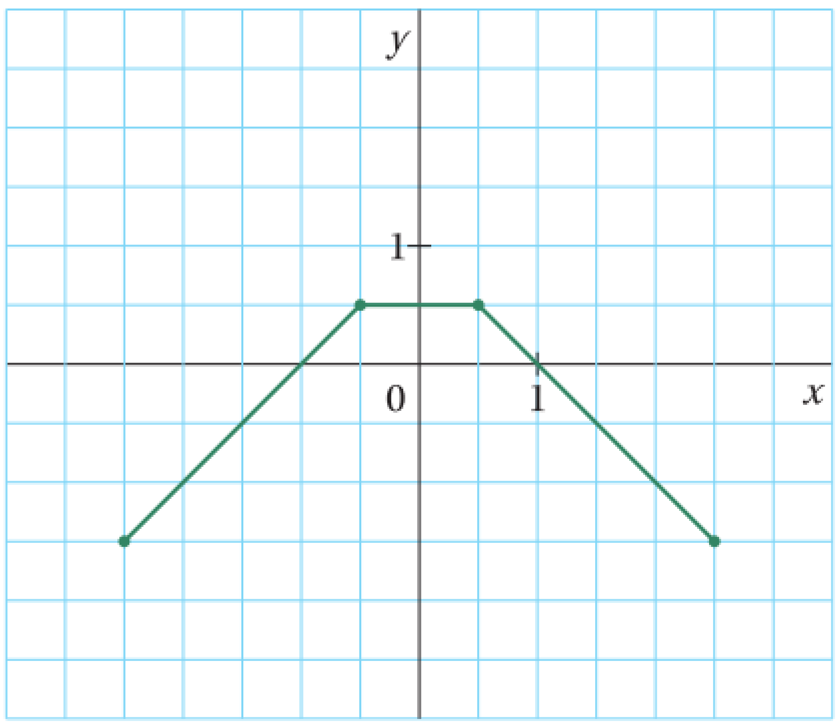


....

....

....

2



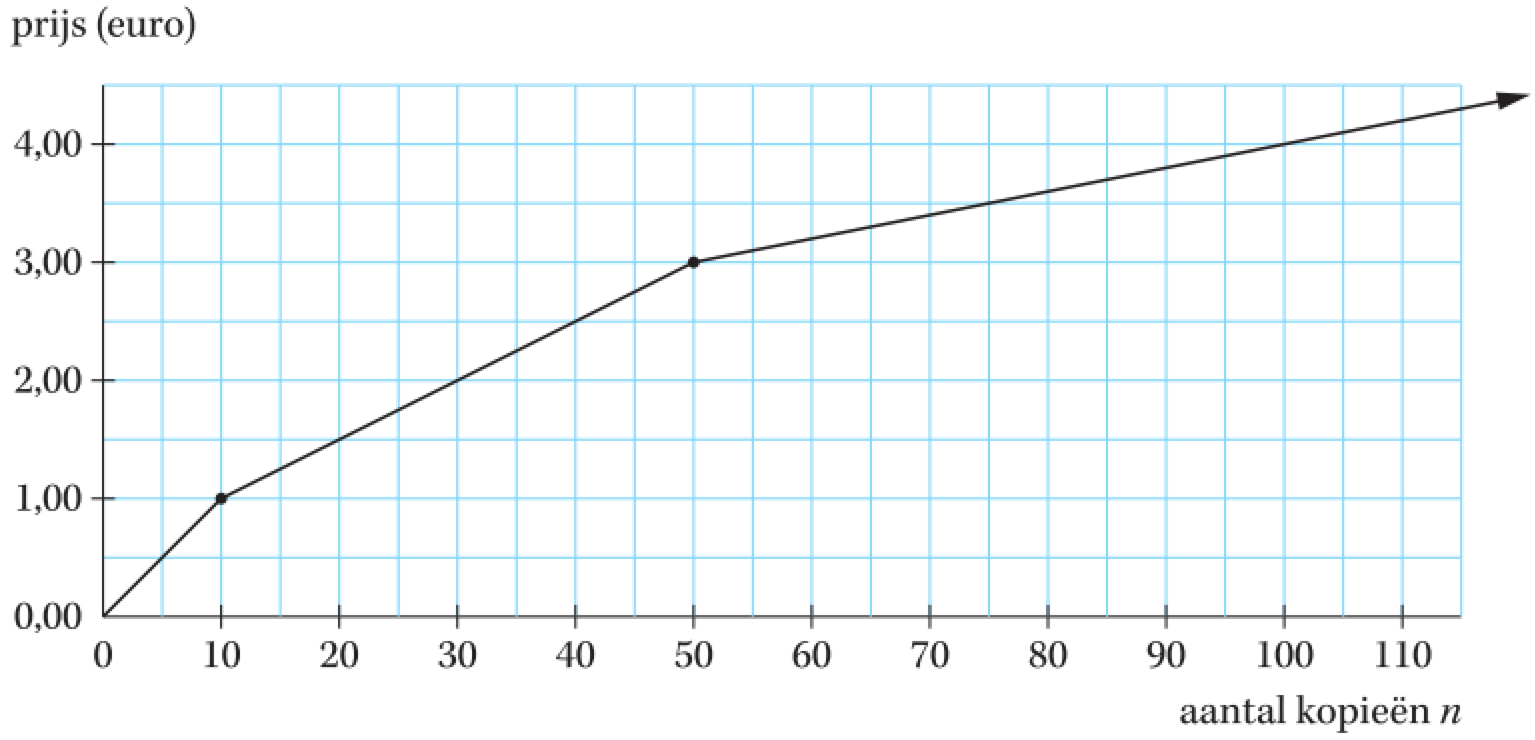
....

....

....

21

Het kopieercentrum Delta-repro rekent met tarieven die ze aan de klanten kenbaar maakt met de volgende grafiek.



1 Welke tarieven hanteert dit kopieercentrum?

....

....

....

2 Stel een drievoudig voorschrift op dat de prijs beschrijft in functie van het aantal kopieën n.

....

....

....

3 Hoeveel betaalt een klant

a voor 8 kopieën?

....

b voor 40 kopieën?

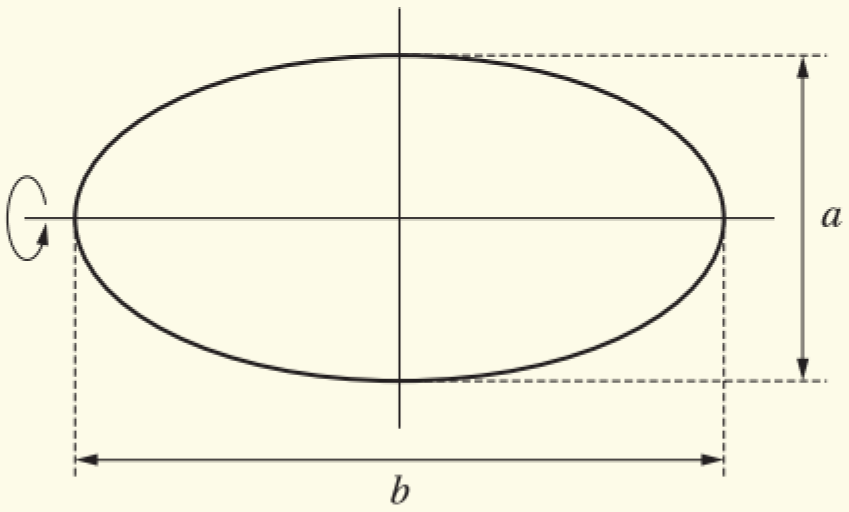
....

c voor 120 kopieën?

....

Uitdagingen

1 Draaien we een ellips om een symmetrieas, dan ontstaat een ruimtelijk lichaam dat we ellipsoïde noemen. De inhoud van een ellipsoïde berekenen we met de formule
$V = \frac{1}{6}\pi a^2 b.$





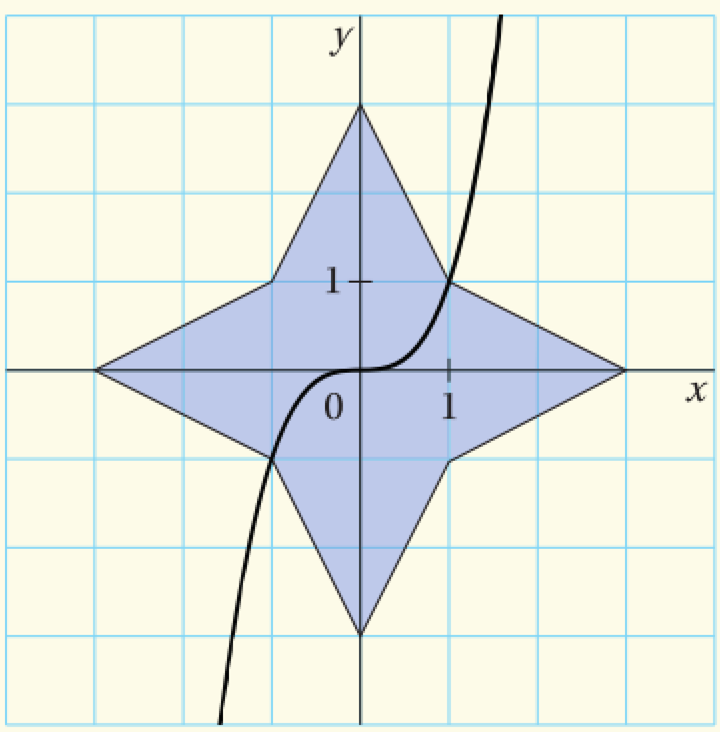
Bepaal voor de ellipsoïde een functievoorschrift dat de inhoud beschrijft in functie van *a* of *b* en geef de specifieke benaming van de functie.

1. De diameter *b* is gelijk aan 6 cm.
2. De diameter *a* is gelijk aan 6 cm.
3. De diameter *b* is tweemaal zo groot als de diameter *a*.
4. De diameters *a* en *b* zijn gelijk. Welk lichaam verkrijgen we in dit geval?

zie pagina 286

2 Gegeven is de derdegraadsfunctie $f(x) = x^3 + p$. Voor welke waarden van *p* gaat de grafiek van deze functie door de hoekpunten van de ster? Controleer de rekenresultaten met ICT.

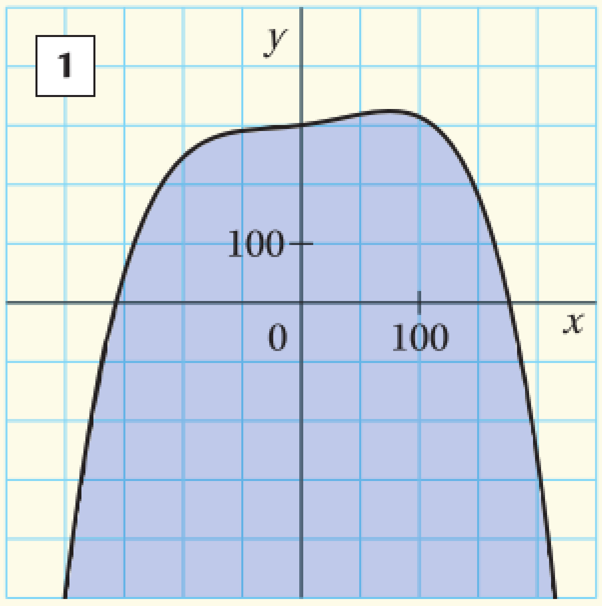
1. Hoekpunt (3, 0)
2. Hoekpunt (1, 1)
3. Hoekpunt (0, 3)
4. Hoekpunt (–1, 1)
5. Hoekpunt (–3, 0)
6. Hoekpunt (–1, –1)
7. Hoekpunt (0, –3)
8. Hoekpunt (1, –1)

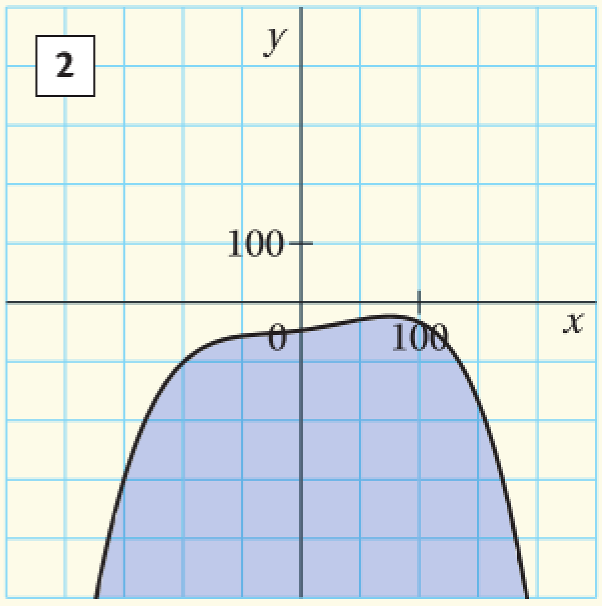


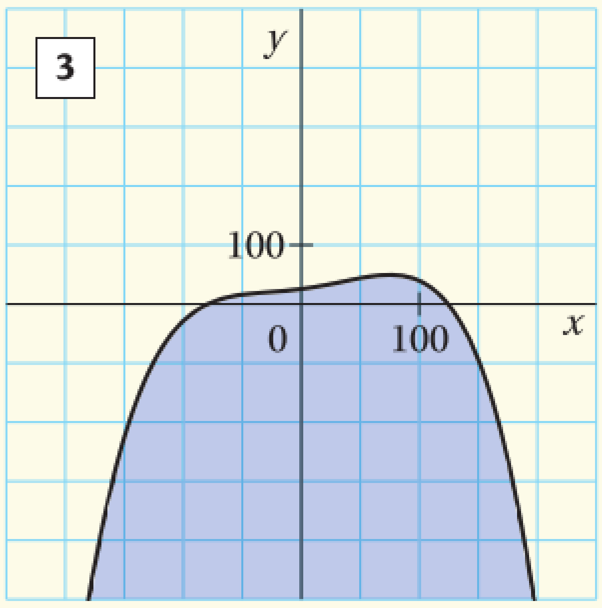
zie pagina 287

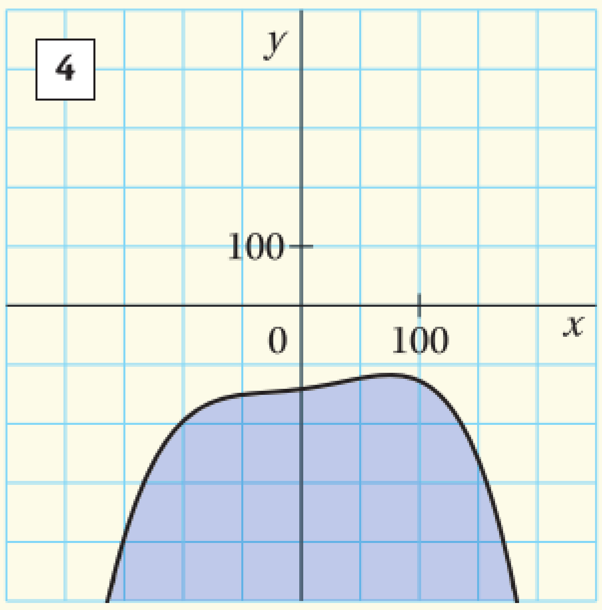
3 Tijdens de beklimming van een steile bergwand observeren twee alpinisten eenzelfde berg vanuit vier standplaatsen. Het profiel van de geobserveerde bergtop is afgebeeld met de grafieken van hogeregraadsfuncties. De oorsprong van elk assenstelsel ligt op dezelfde hoogte als een standplaats van de alpinisten. De afstanden x en y zijn uitgedrukt in meter.











Standplaats 1: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x + 300$

Standplaats 2: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x - 48$

Standplaats 3: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x + 25$

Standplaats 4: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x - 142$

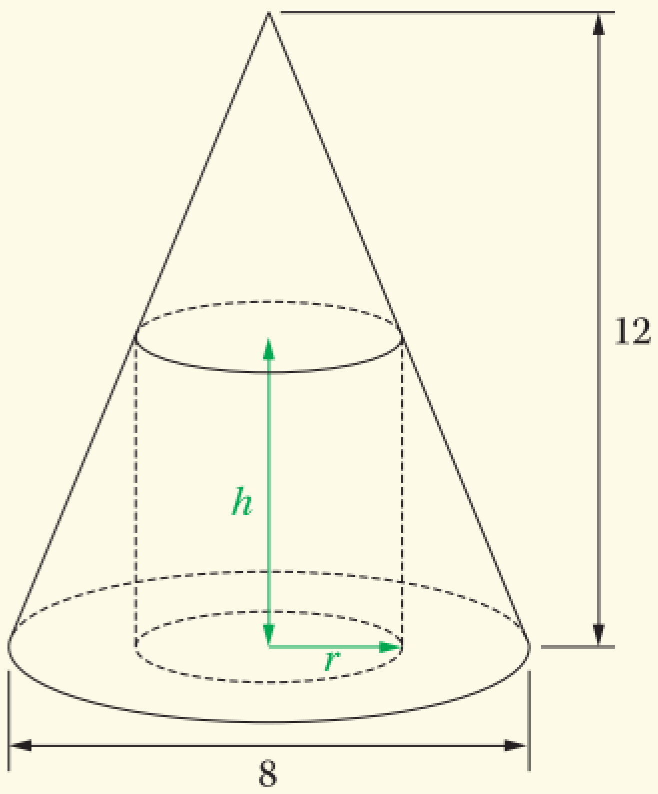
1 Waar is de klimroute tussen standplaats 1 en standplaats 4 dalend?

2 Wat zijn de verschillen tussen de vier functievoorschriften die het bergprofiel beschrijven?

3 Wat is het hoogteverschil tussen standplaats 1 en standplaats 4?

zie pagina 288

4 Een cilinder met straal r en hoogte h is ingeschreven in een kegel. De diameter van het grondvlak van de kegel is 8 cm en de hoogte is 12 cm.



1 Druk de hoogte h van de cilinder uit in functie van de straal r.

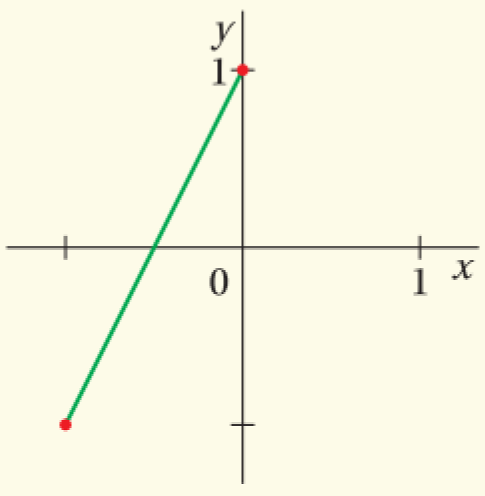
2 Stel een functievoorschrift op dat het volume van de cilinder uitdrukt in functie van r.

3 Bepaal de graad en de specifieke benaming van de veeltermfunctie.

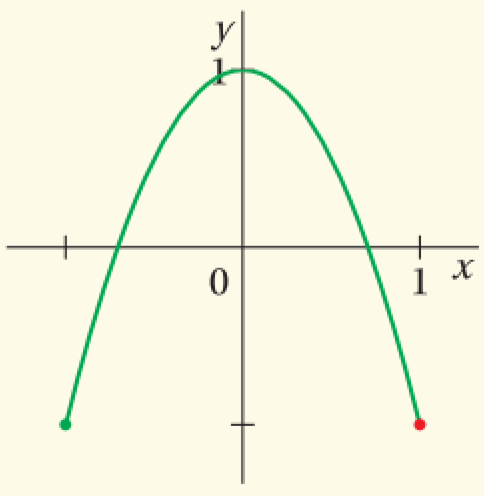
zie pagina 289

5 Bepaal het domein en het bereik van de functie.

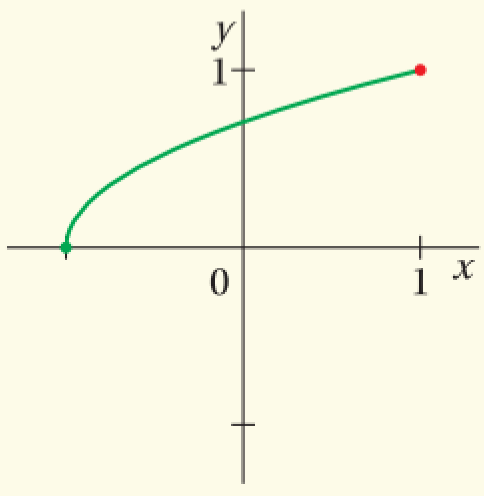
1



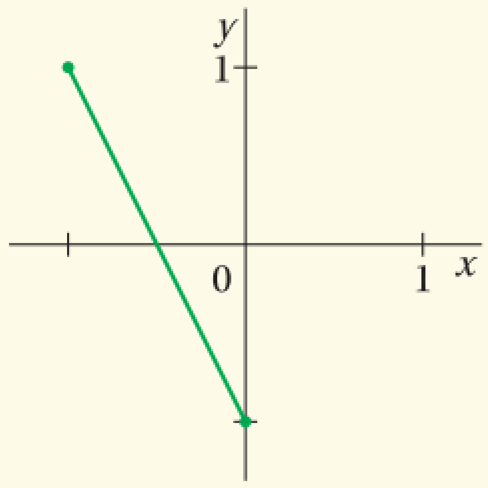
2



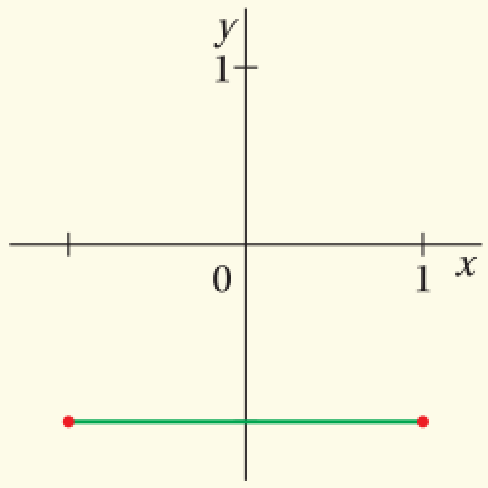
3



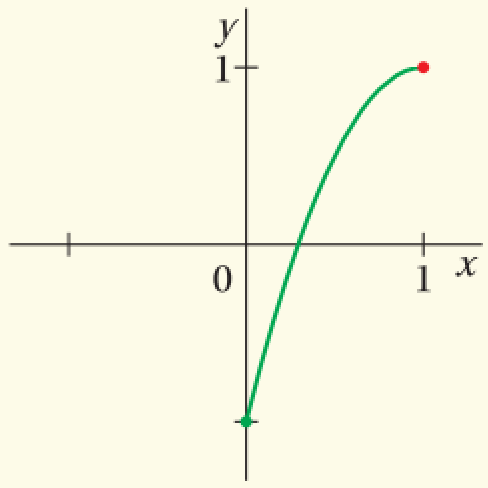
4



5



6



zie pagina 290

6 Van een functie f zijn het domein en het bereik gegeven.

Teken de grafiek als we weten dat deze grafiek een deel is van een stijgende rechte.

1. dom f = [–1, 3]
   ber f = [–2, 2]
2. dom f =]–4, 1[
   ber f =]–3, 2[

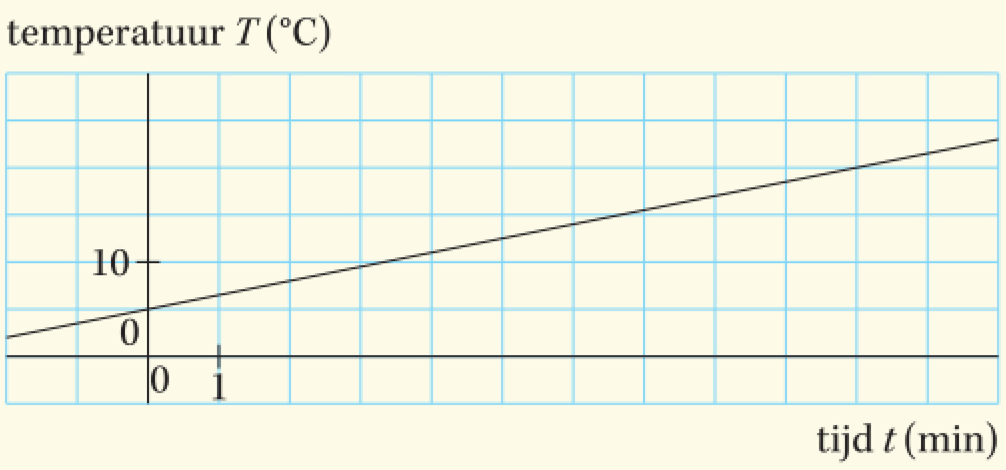
Teken de grafiek als we weten dat deze grafiek een deel is van een dalende rechte.

3. dom f =]–3, 3]
   ber f = [–3, 2[
4. dom f = [–4, 2[
   ber f =]–3, 1]

zie pagina 291

7 Een blikje cola heeft een temperatuur van 5 °C als het uit de ijskast wordt genomen. De opwarming van het blikje gebeurt gelijkmatig tot 20 °C kamertemperatuur.

1. Duid op de grafiek het deel aan dat past bij de beschrijving.



2. Wat is de gemiddelde temperatuurstijging per minuut?
3. Bepaal het functievoorschrift en het werkdomein.

zie pagina 291

8 Een blok ijs met afmetingen $20 \times 30 \times 40$ cm heeft een groter volume dan een bol ijs met een diameter van 30 cm. Elke minuut smelt aan elke kant 1 cm ijs weg. Het volume van het blok en de bol ijs in functie van de tijd kunnen we beschrijven met de formules

$V_{blok} = (20 - 2t)(30 - 2t)(40 - 2t)$

$V_{bol} = \frac{4}{3}\pi(15 - t)^3$

V: volume in cm^3
t: tijd in min

1 Bereken het volume van het blok en de bol gedurende de eerste 12 minuten. Vul de tabel aan op 1 cm^3 nauwkeurig.

tijd t (min)	volume blok ijs V_{blok} (cm^3)	volume bol ijs V_{bol} (cm^3)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

2 Na hoeveel minuten is het volume van de bol groter dan het volume van het blok?

3 Na hoeveel minuten is het blok ijs volledig gesmolten? En de bol?

4 Hoe groot is de diameter van de bol op het ogenblik dat het blok volledig gesmolten is?

zie pagina 292

9 Het verbrandingsproces van een kaars verloopt volgens de formule $h = 20 - 0{,}2t^2$ waarin t de tijd in uren voorstelt en h de hoogte van de kaars in cm. Na hoeveel tijd is de hoogte van deze kaars gehalveerd?

zie pagina 293

10 Janne en Ward nemen deel aan een trektocht van 20 km. Janne stapt aan een constante snelheid van 4 km per uur. De tussentijden van Ward, geregistreerd door de controleposten, voldoen aan de formule

$$s = \frac{1}{120}(17t^4 - 162t^3 + 487t^2 + 18t)$$

s : afstand in km
t : tijd in uur

1 Teken met ICT de afstand-tijdgrafieken van Janne en Ward.
Stel het kijkvenster in als volgt: $x_{min} = 0$ $x_{max} = 6$ $y_{min} = 0$ $y_{max} = 25$

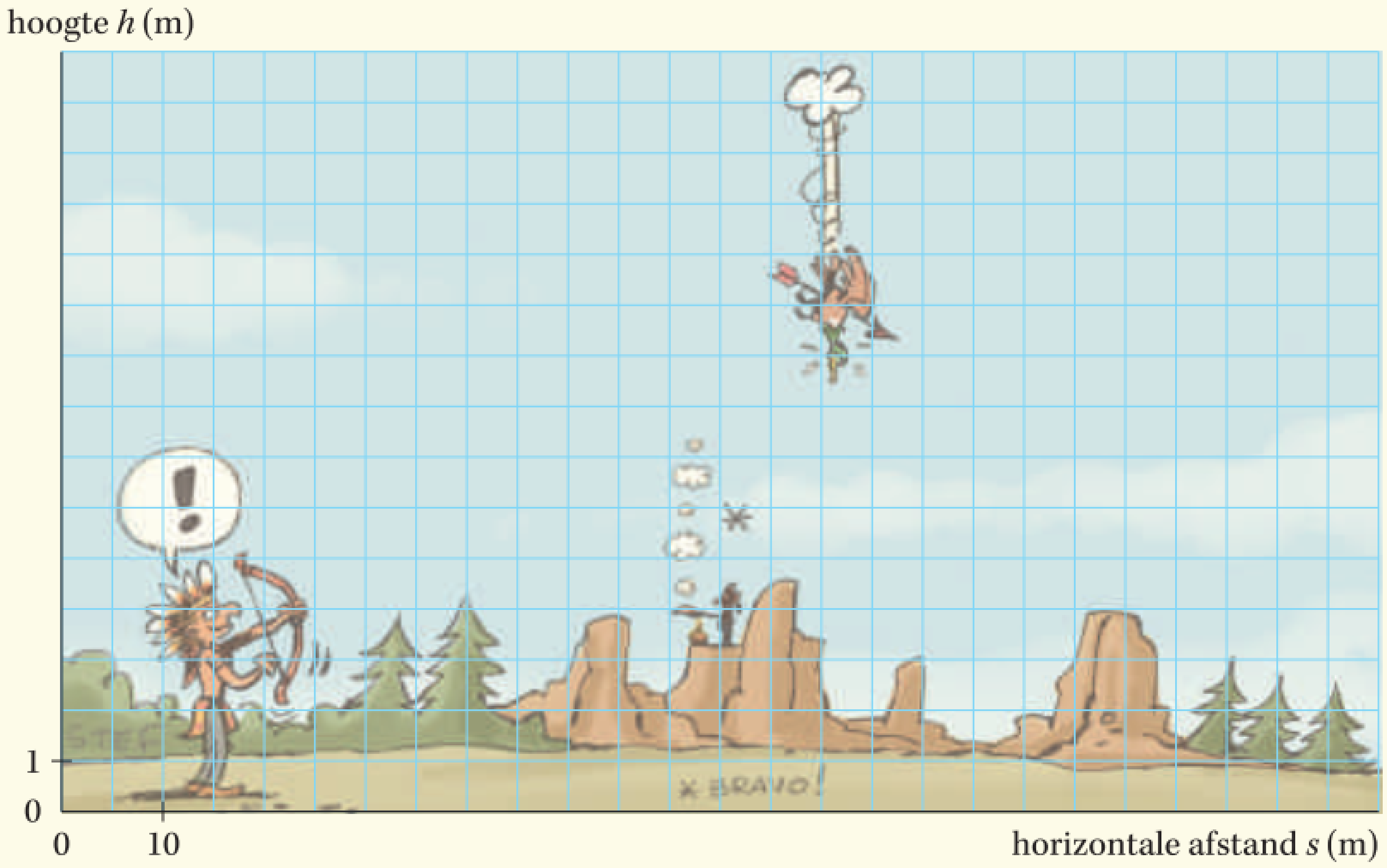
2 Wanneer haalt Ward Janne voor de eerste keer in?
Hoeveel kilometer hebben ze dan afgelegd?

3 Wie komt als eerste aan?

zie pagina 293

11 Witte Veder schiet met pijl en boog naar een overvliegende arend. De vlucht van de arend kunnen we beschrijven met de formule $h = 0{,}00001s^3 + 0{,}08s + 5$. De baan van de pijl voldoet aan de formule $h = -0{,}0032s^2 + 0{,}368s + 1{,}92$. In beide formules stelt s de horizontale afstand in meter voor en h de bijbehorende hoogte eveneens in meter.

1 Stel de vlucht van de arend en de baan van de pijl grafisch voor in het assenstelsel.



2 Waarom heeft Witte Veder twee kansen om de arend te treffen?

3 Op welke hoogte kan de arend getroffen worden door de pijl?

zie pagina 294

12 Teken de grafiek van de functie f.

1 $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{als} \quad x<0 \\ -2x+1 & \text{als} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0{,}5x-2 & \text{als} \quad x>2 \end{cases}$

2 $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2+4 & \text{als} \quad x \leqslant 0 \\ -(x-3)^2+4 & \text{als} \quad x>0 \end{cases}$

zie pagina 295

13 Simon en Lukas deden mee aan een halve triatlon: 3 km zwemmen, 75 km fietsen en 24 km lopen. In de tabel lezen we hun gemiddelde snelheid af over elke discipline.

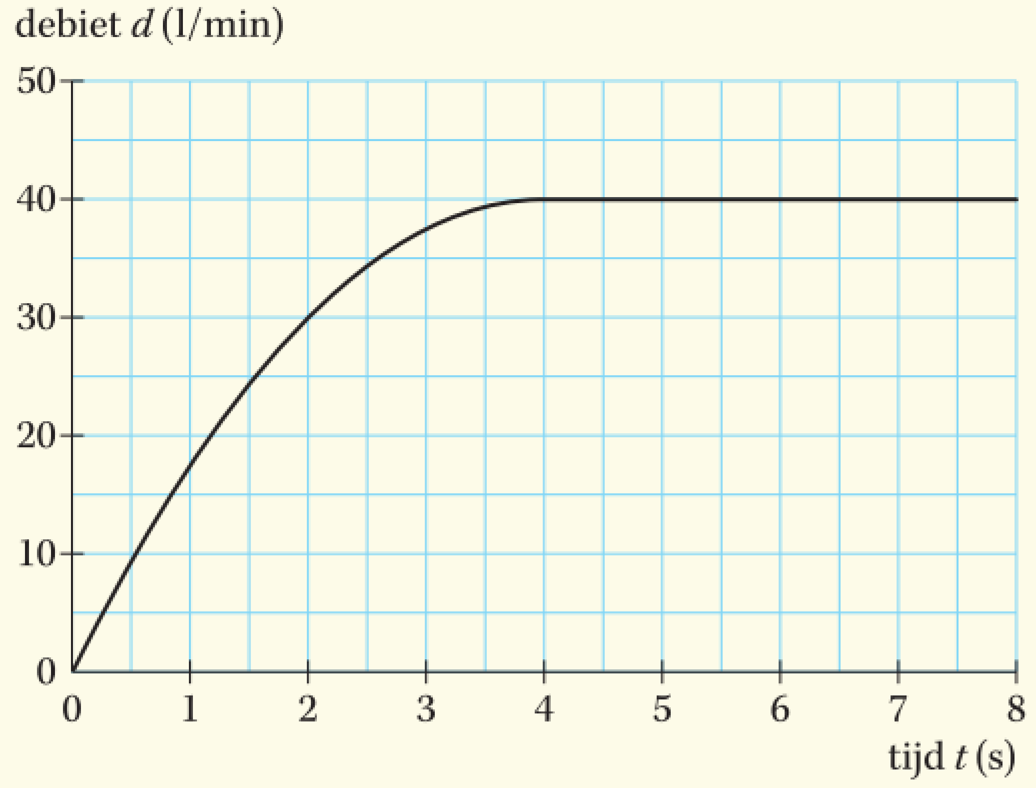
	zwemmen	fietsen	lopen
Simon	3 km/h	30 km/h	12 km/h
Lukas	4 km/h	25 km/h	16 km/h

1 Stel de prestatie van Simon en van Lukas voor met een grafiek die uit drie aaneensluitende lijnstukken bestaat.
2 Wie bereikte als eerste de finish?
3 Hoe groot was de voorsprong?
4 Welke betekenis hebben de snijpunten van beide grafieken?
5 Wie lag aan de leiding na 4 uur?
6 Wat is de gemiddelde snelheid van Simon en van Lukas over deze halve triatlon?
7 Noteer het drievoudig voorschrift dat het koersverloop weergeeft van Simon.
De richtingscoëfficiënt van elk lijnstuk komt overeen met de bijbehorende snelheid.
De vergelijking van de rechten kunnen we opstellen met de formule voor punt en rico: $y - y_A = a(x - x_A)$.



zie pagina 296

14 Het debiet van een tuinslang is weergegeven met de volgende grafiek.





1 In hoeveel seconden kunnen we de sproeikop van de tuinslang volledig opendraaien?

2 Wat is het debiet van deze tuinslang?

3 Het tweevoudig voorschrift van deze grafiek bestaat uit een tweedegraadsfunctie en een constante functie. Stel het voorschrift op.

4 Controleer het voorschrift met ICT.

zie pagina 298

2

Onderzoek van veeltermfuncties

Bij een bezoek aan de dokter willen we precies weten welke ziekte we hebben en wanneer we zullen genezen zijn. Patiënten vragen zich dikwijls af:

- Is de ziekte besmettelijk? En zo ja, hoelang?
- Zal de koorts nog stijgen?
- Wat is de maximale lichaamstemperatuur die bij deze ziekte kan optreden?
- Wanneer zal de koorts onder de 37 graden zakken?
- Zal de pijn nog toenemen?
- Wanneer zal de pijn volledig verdwenen zijn?

De gestelde vragen kunnen wetenschappers wiskundig oplossen als ze het ziektebeeld kunnen beschrijven met de passende formules.

2.1 Nulwaarden en hogeregraadsvergelijkingen

2.2 Extreme waarden en tekenverandering

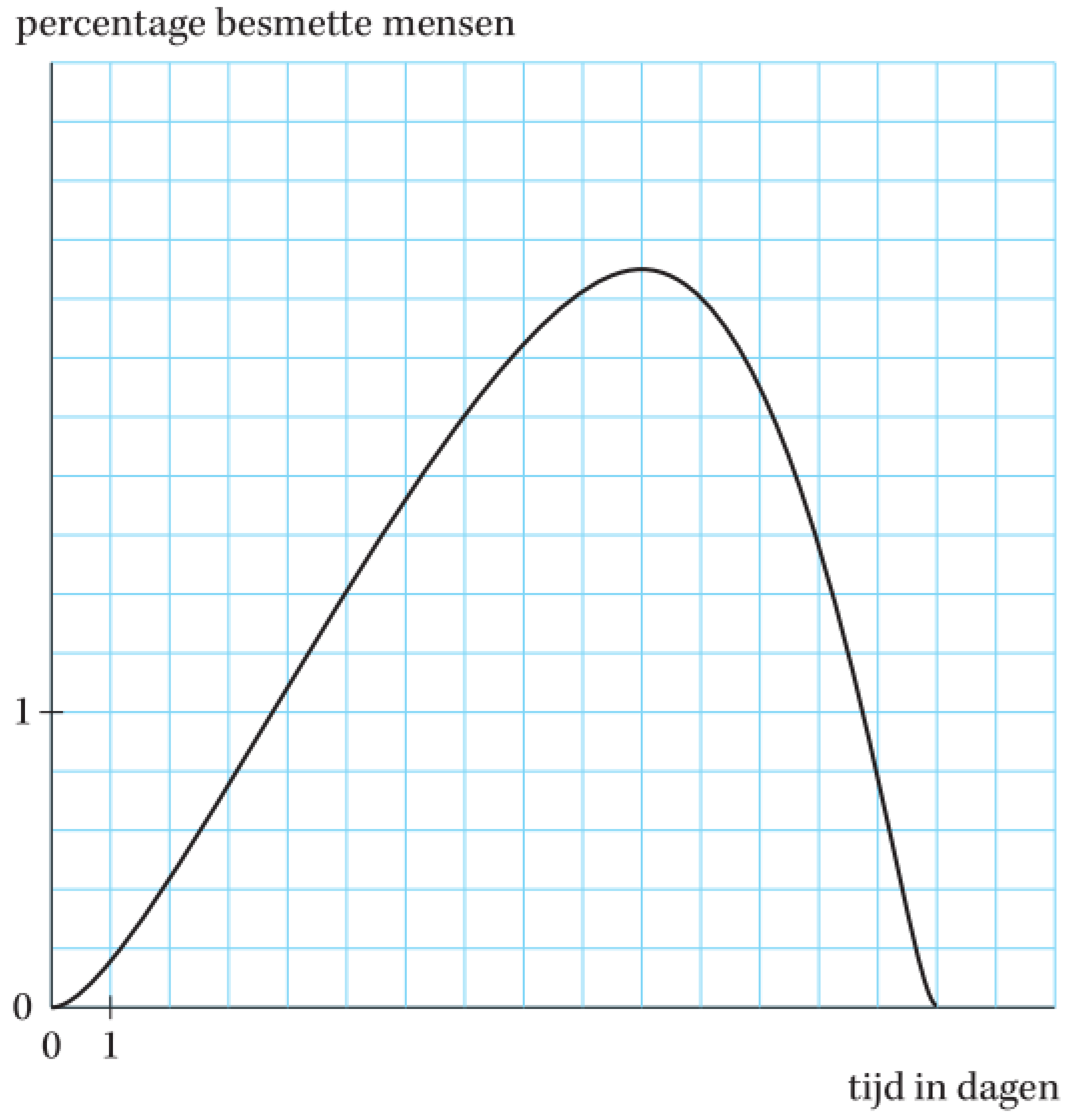


2.1 Nulwaarden en hogeregraadsvergelijkingen

Nulwaarden van veeltermfuncties

1 Instap

Als we grieperig zijn, dan blijven we best thuis omdat deze ziekte gedurende enkele dagen besmettelijk is. Het percentage mensen die we per dag besmetten, kunnen we aflezen op de grafiek.





1 Op welke dag is het gevaar voor besmetting het grootst?

....

2 Hoe groot is het percentage besmette mensen die dag?

....

3 Wanneer worden meer dan 2 % mensen besmet?

....

4 Na hoeveel dagen is het gevaar voor besmetting geweken?

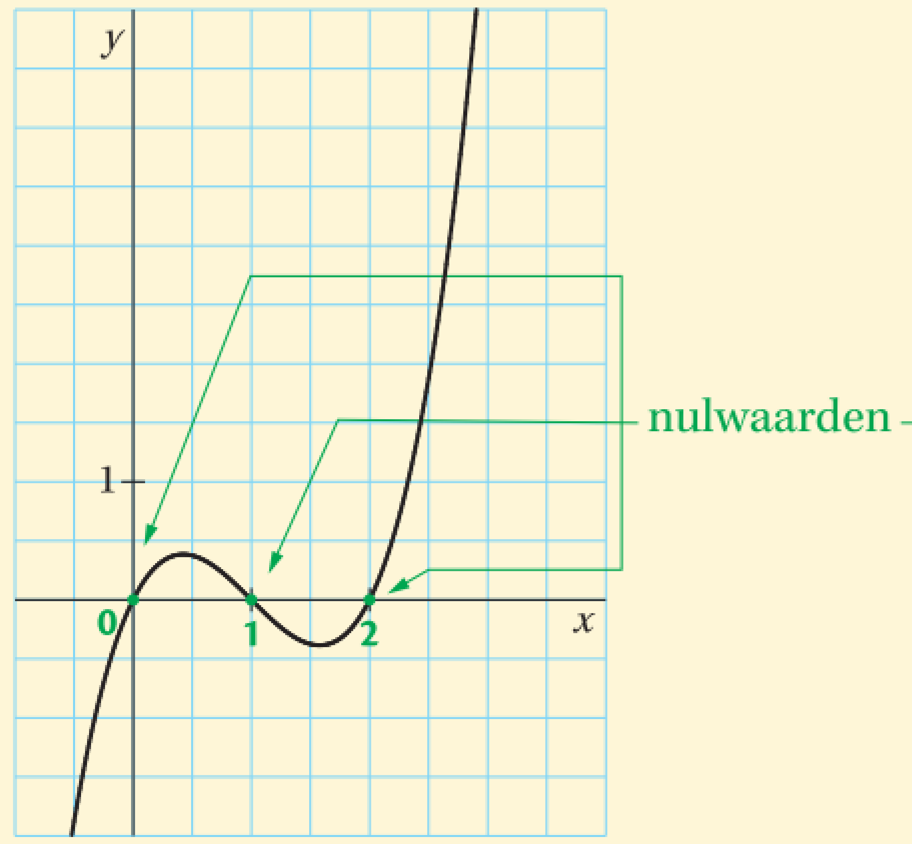
....

5 Welke nulwaarden lezen we af op de grafiek?

....

Nulwaarden van een veeltermfunctie

Op de grafiek en in de tabel lezen we de nulwaarden van de veeltermfunctie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ af.



x	$f(x)$
...	...
–0,5	–1,88
0	**0**
0,5	0,38
1	**0**
1,5	–0,38
2	**0**
2,5	1,88
3	6
...	...

De nulwaarden van de functie f zijn 0, 1 en 2.

Om de nulwaarden van $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ te berekenen, stellen we de functiewaarde $f(x)$ gelijk aan 0 en lossen we de verkregen vergelijking op.

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \qquad \text{$f(x)$ vervangen door $x^3 - 3x^2 + 2x$}$$

De vergelijking $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ waarin de hoogste exponent van de onbekende gelijk is aan 3, noemen we een **derdegraadsvergelijking**. Vergelijkingen waarin de hoogste exponent van de onbekende x hoger is dan 2, noemen we **hogeregraadsvergelijkingen**.

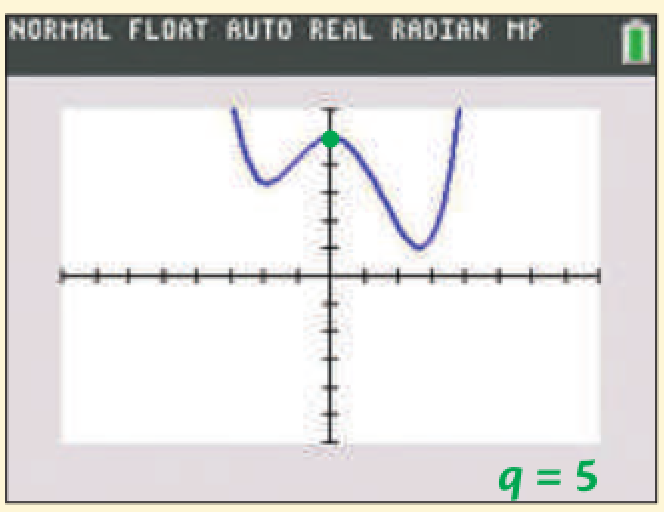
Om hogeregraadsvergelijkingen op te lossen, zijn rekentechnieken nodig die we bestuderen in de volgende paragraaf.

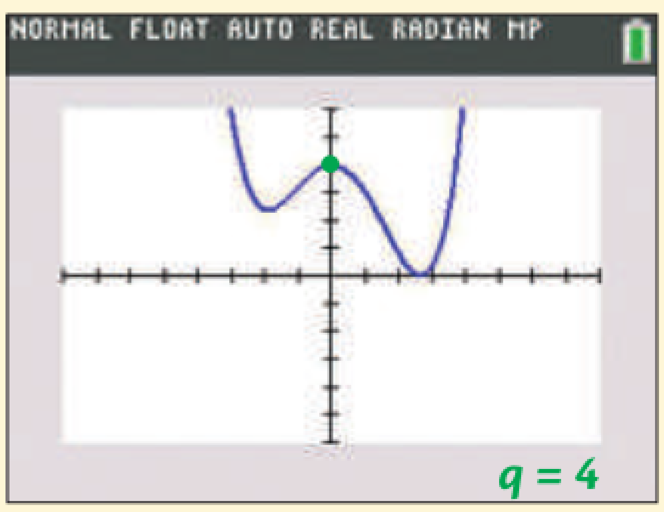
Aantal nulwaarden van een veeltermfunctie

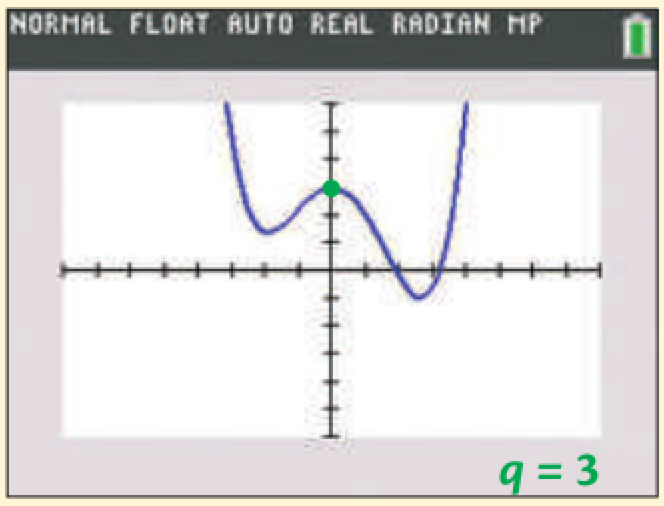
Een *n*-de graadsfunctie heeft hoogstens *n* nulwaarden.

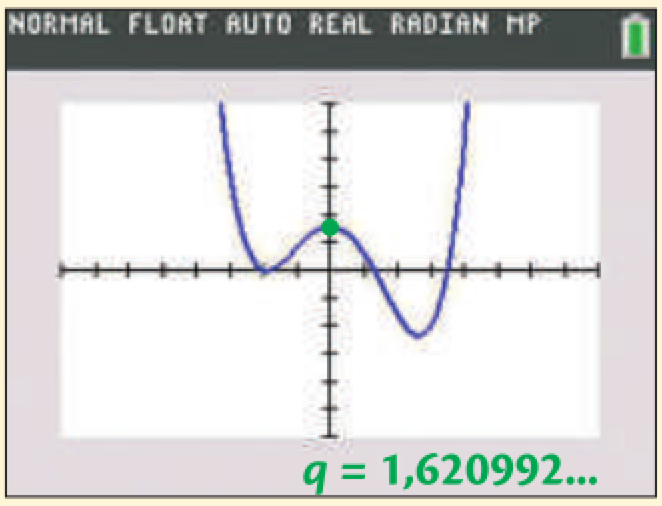
Voorbeeld

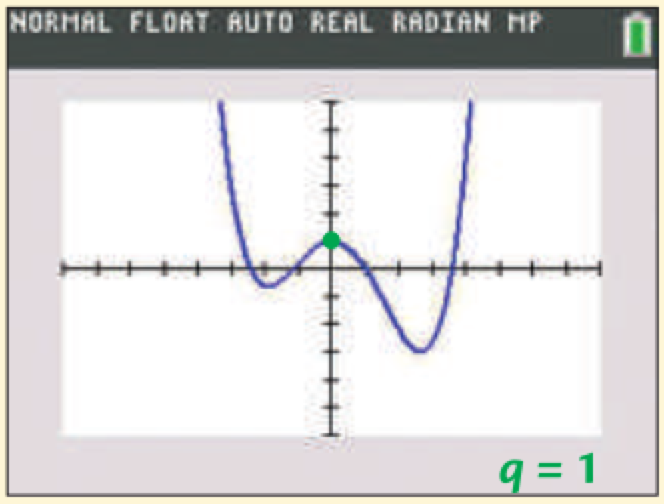
We onderzoeken de grafieken met voorschrift $f(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}1x^3 - x^2 + q$ voor verschillende waarden van de constante term q.

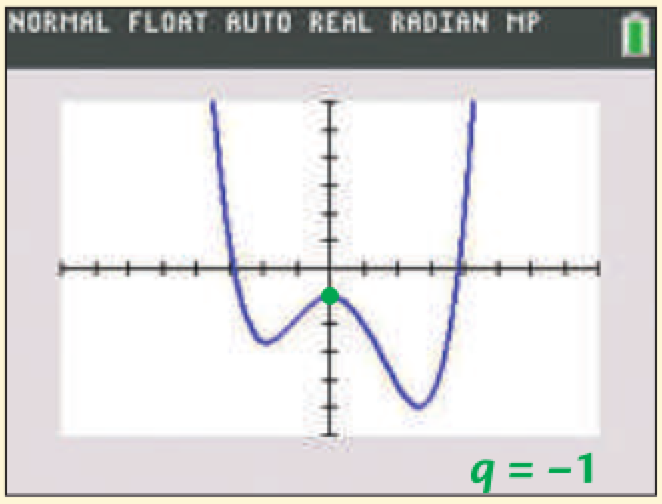












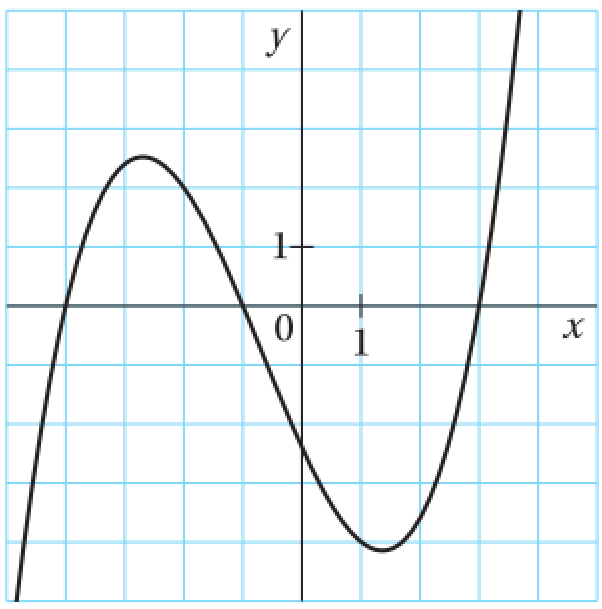
We stellen vast dat de grafiek boven de x-as kan liggen, de x-as kan raken in één punt, de x-as kan snijden in twee of vier punten of de x-as kan raken in één punt en snijden in twee punten.

Bijgevolg heeft een vierdegraadsfunctie hoogstens 4 nulwaarden.

2

Schrijf van de functie alle nulwaarden die we kunnen aflezen op de grafiek.

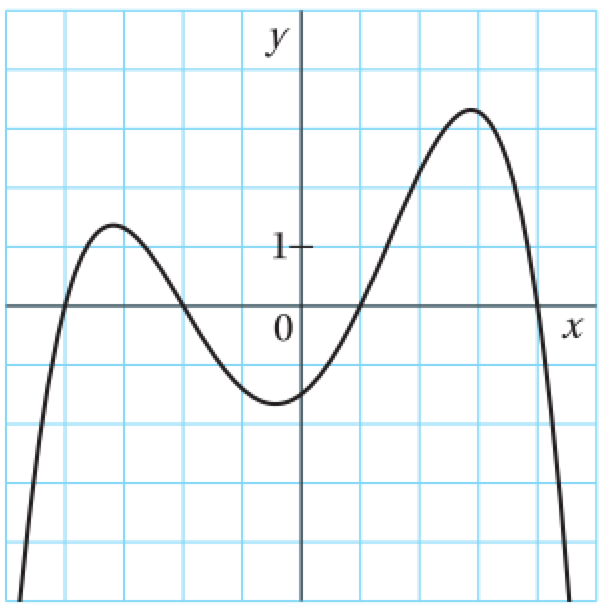
1



Nulwaarden:

....

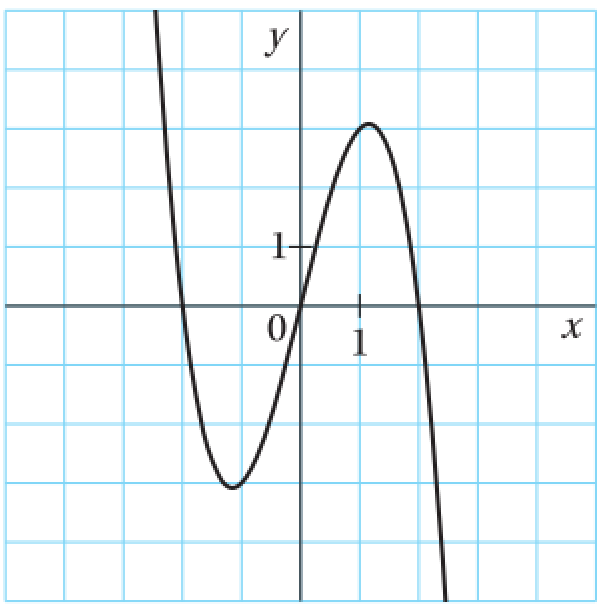
2



Nulwaarden:

....

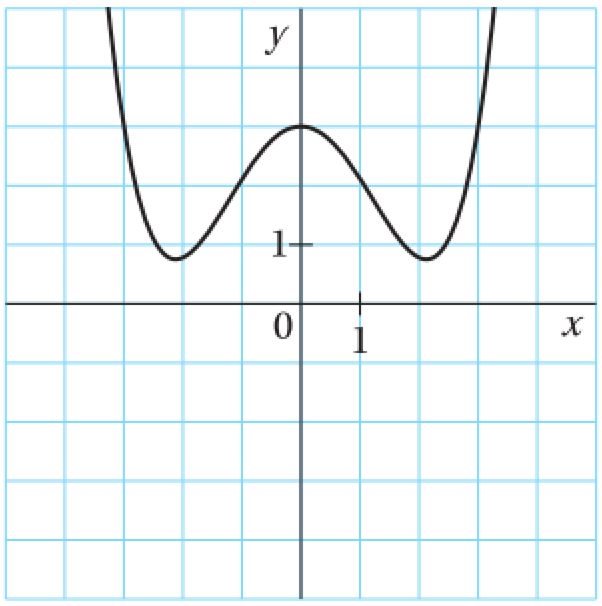
3



Nulwaarden:

....

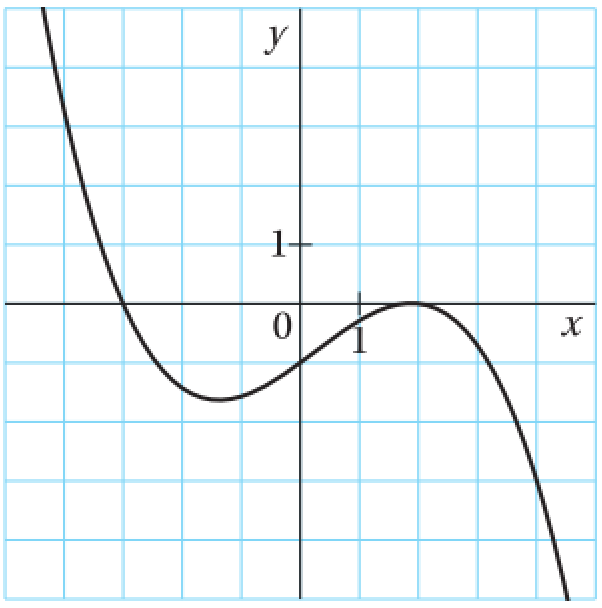
4



Nulwaarden:

....

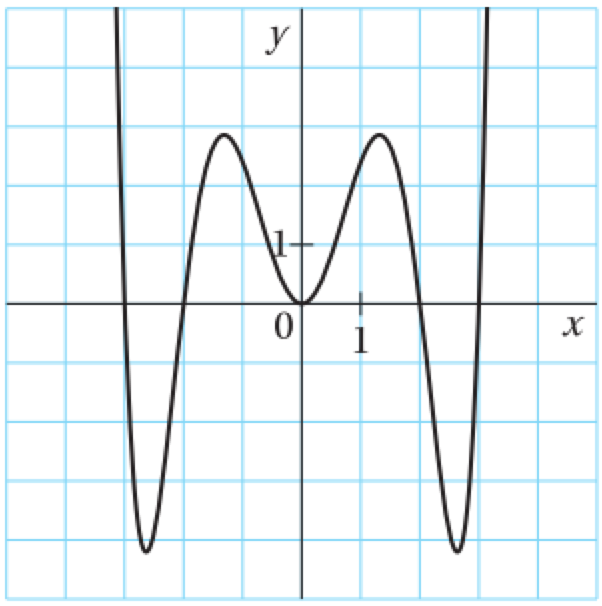
5



Nulwaarden:

....

6



Nulwaarden:

....

3

Schrijf van de functie *f* alle nulwaarden die we kunnen aflezen in de tabel.

1

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	280	72	0	–8	0	0	–8	0	72	280	720

Nulwaarden: ....

2

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	–182	0	50	40	18	8	10	0	–70	–272	–702

Nulwaarden: ....

3

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	54	35	20	9	2	–1	0	5	14	27	44

Nulwaarden: ....

4

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	50	33	20	11	6	5	8	15	26	41	60

Nulwaarden: ....

4

Onderzoek of het getal a een nulwaarde is van de veeltermfunctie f. Vink de nulwaarde aan.

1 $a = -1$ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 2$ ☐

....

2 $a = 3$ $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 9$ ☐

....

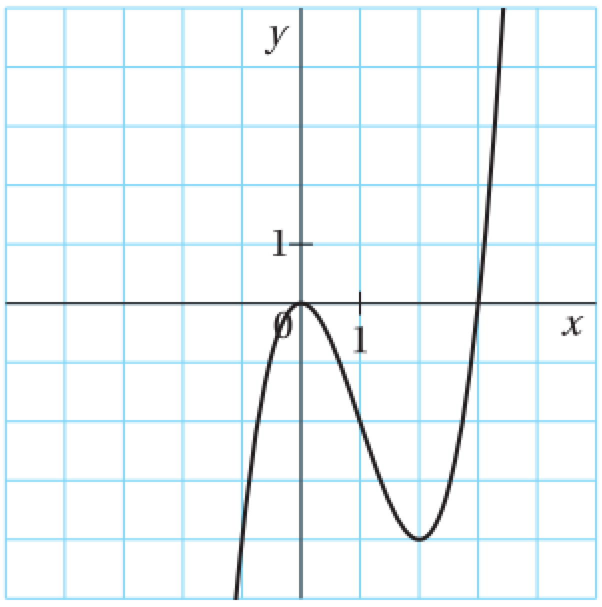
3 $a = -2$ $f(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 7x - 10$ ☐

....

5

Gegeven is de grafiek van een veeltermfunctie. Lees de coördinaten af van de gemeenschappelijke punten met de assen. Controleer door berekening.

1 $f(x) = x^3 - 3x^2$



....

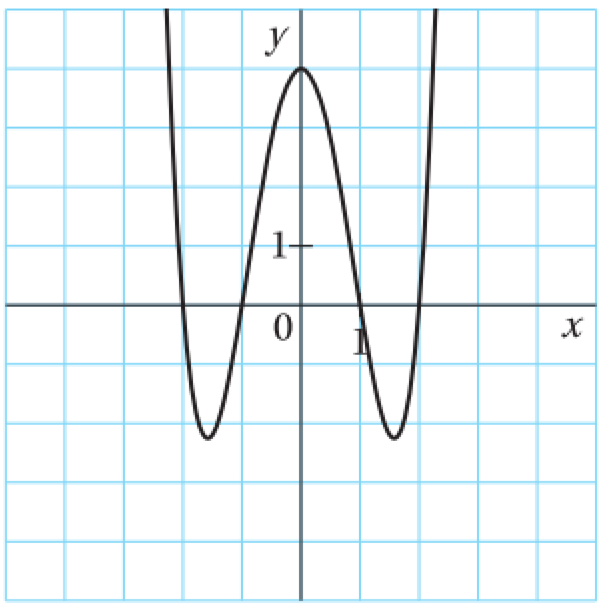
....

....

....

....

2 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



....

....

....

....

....

....

....

Nulwaarden berekenen

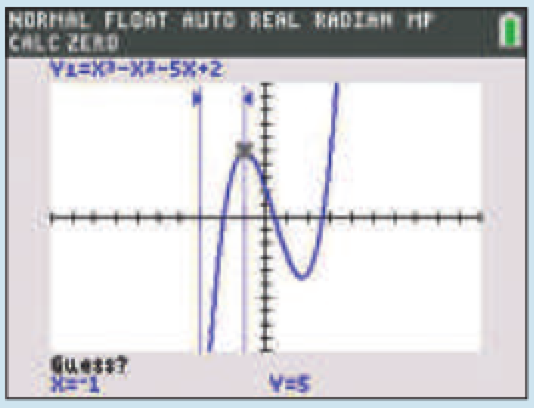
We berekenen de nulwaarden van de functie $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

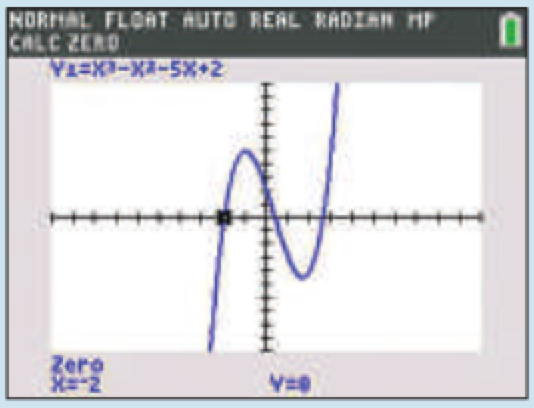
TEXAS INSTRUMENTS

We tekenen de grafiek en zoeken de eerste nulwaarde tussen de grenzen –3 en –1.

■ [Y=] $x^3 - x^2 - 5x + 2$ [2ND] [CALC] [2: zero] –3 [ENTER] –1 [ENTER] [ENTER]

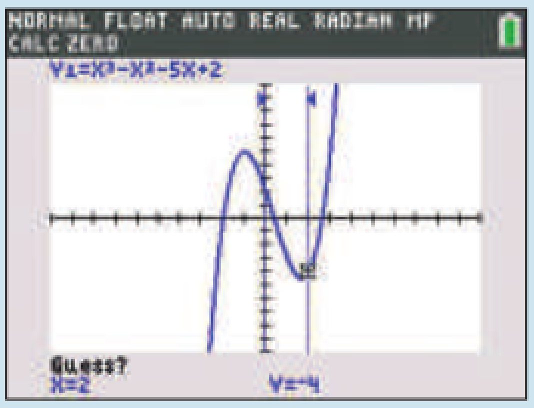


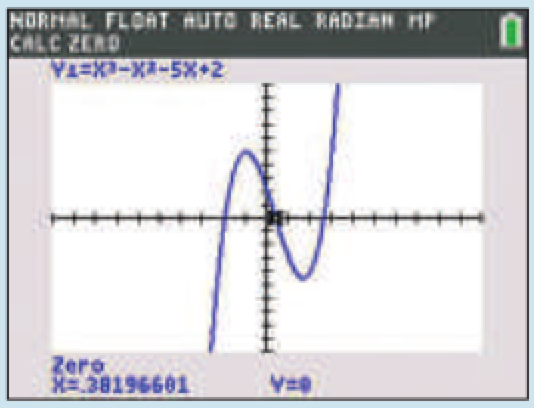




De tweede nulwaarde zoeken we tussen de grenzen 0 en 2.

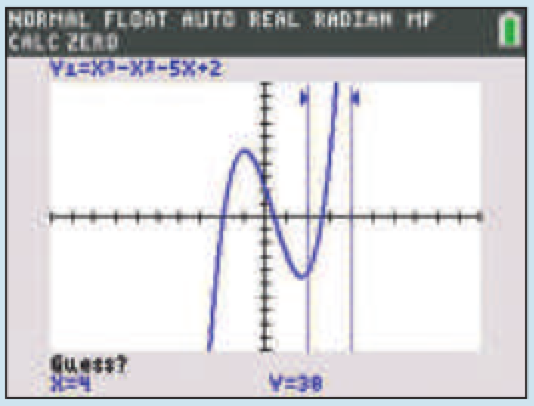
■ [2ND] [CALC] [2: zero] 0 [ENTER] 2 [ENTER] [ENTER]

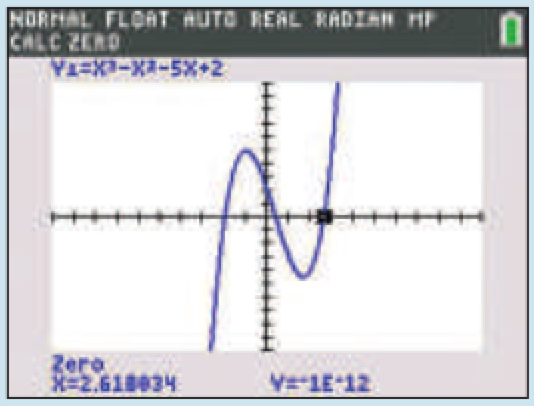




De derde nulwaarde zoeken we tussen de grenzen 2 en 4.

■ [2ND] [CALC] [2: zero] 2 [ENTER] 4 [ENTER] [ENTER]



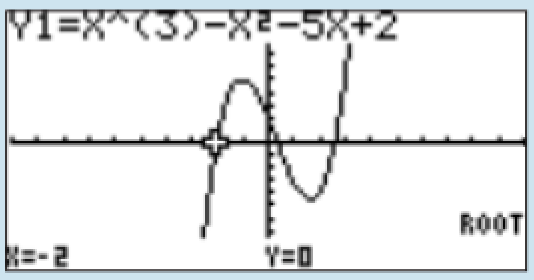


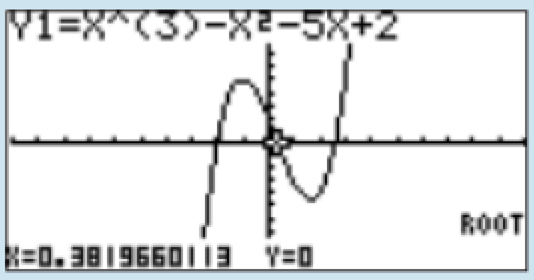
De drie nulwaarden zijn –2 ; 0,38... en 2,61... .

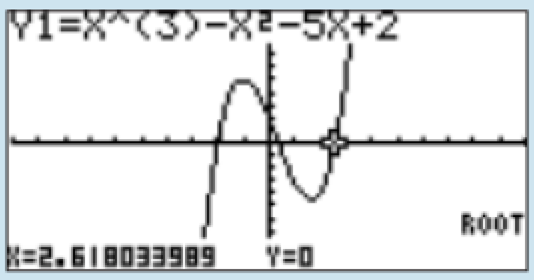
CASIO

We tekenen de grafiek en bepalen de nulwaarden.

■ [MENU] [3: GRAPH] $x^3 - x^2 - 5x + 2$ [EXE] [F6: DRAW] [SHIFT] [G-Solv] [F1: Root] [▶] [▶]







De drie nulwaarden zijn –2 ; 0,38... en 2,61... .

6

Bepaal met ICT de nulwaarden. Rond af op 2 decimalen.

1 $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$ ....

2 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 12$ ....

3 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8$ ....

4 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ ....

5 $f(x) = x^4 - x^3 - 39x^2 - 31x + 70$ ....

6 $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 6x - 8$ ....

7 $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 9$ ....

8 $f(x) = x^6 + 7x^3 - 8$ ....

7

De vierdegraadsfuncties hebben nulwaarden die gehele delers zijn van 12. Bepaal met ICT deze nulwaarden. Vink de nulwaarden aan.

functie	nulwaarden											
	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	6	–6	12	–12
$f(x) = x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36$												
$f(x) = -x^4 - 8x^3 + 49x^2 + 8x - 48$												
$f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24$												

8

Geef een voorbeeld van een vierdegraadsfunctie

a zonder nulwaarden. ....

b met één nulwaarde. ....

c met twee nulwaarden. ....

d met drie nulwaarden. ....

e met vier nulwaarden. ....

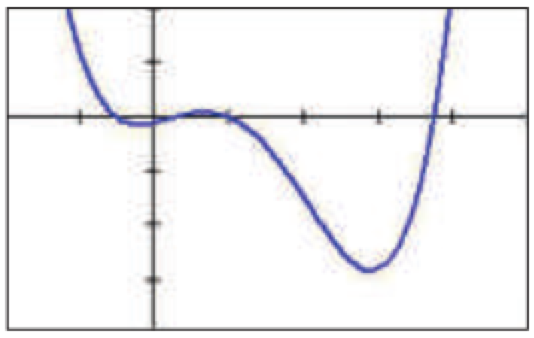
9

Teken met ICT de grafiek en gebruik de gegeven venstervariabelen.

Bepaal de nulwaarden. Rond af op 2 decimalen.

1 $y = 2x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 3x - 1$

20

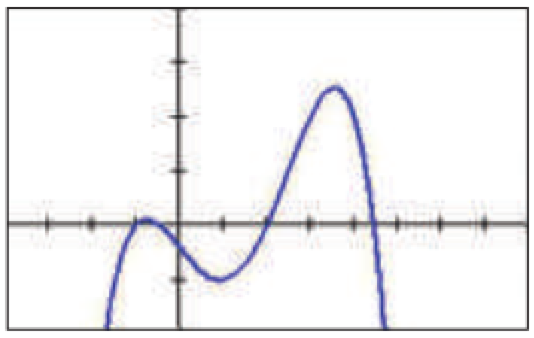
−2  5

−40

Nulwaarden: ……………………………………

2 $y = -x^4 + 5x^3 - 10x - 4$

40

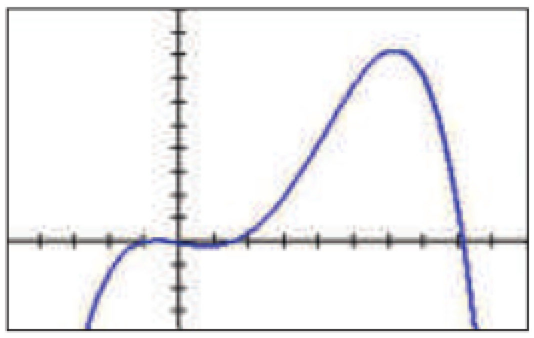
−4  8

−20

Nulwaarden: ……………………………………

3 $y = -2x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 25x - 3$

1000

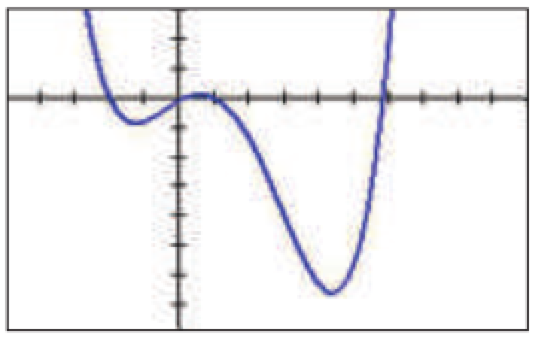
−5  10

−400

Nulwaarden: ……………………………………

4 $y = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 13x - 2$

60

−5  10

−160

Nulwaarden: ……………………………………

10

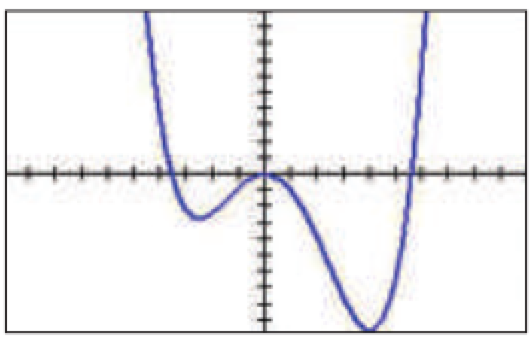
Teken met ICT de grafiek.

a Bepaal de venstervariabelen.

b Bepaal de nulwaarden. Rond af op 2 decimalen.

1 $y = x^4 - 2x^3 - 20x^2$

……………

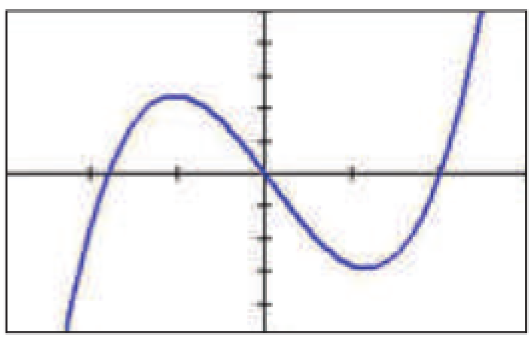
……………  ……………

……………

Nulwaarden: ……………………………………

2 $y = x^3 - 2x^2 - 360x$

……………

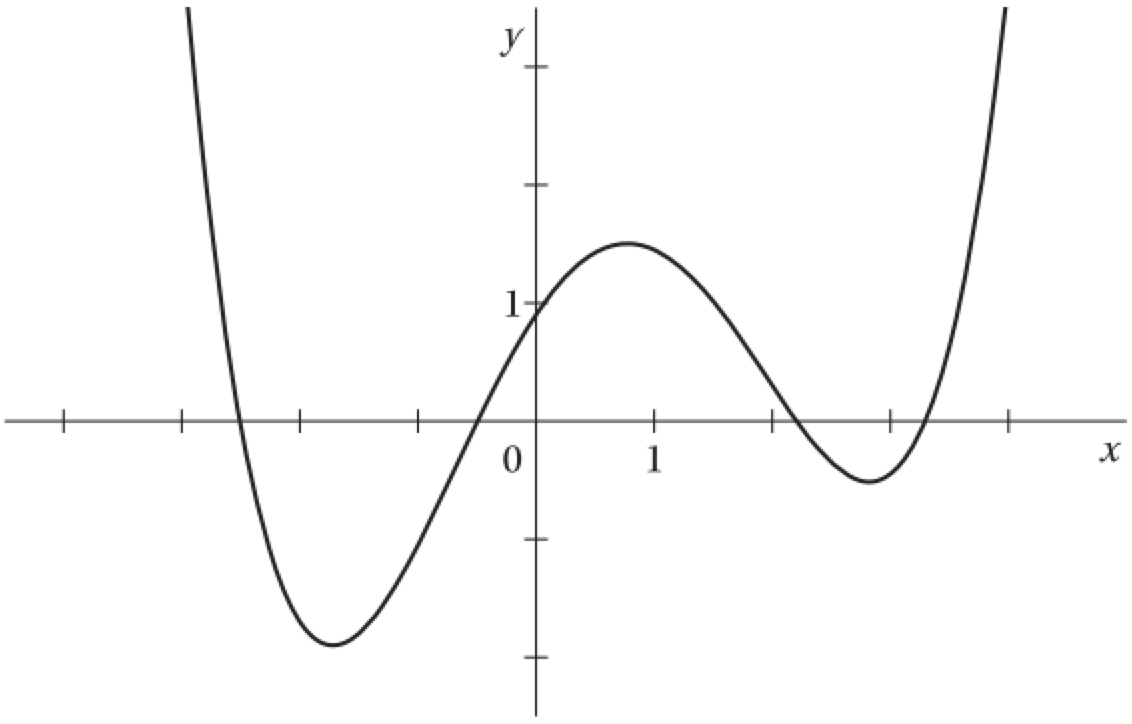
……………  ……………

……………

Nulwaarden: ……………………………………

11

Door een natuurpark loopt een riviertje waarvan de kronkelige loop overeenkomt met de grafiek met voorschrift $y = 0{,}1x^4 - 0{,}25x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x + 0{,}9$ en waarin x en y afstanden in kilometer voorstellen.



De wandeldreef met de vier bruggetjes loopt van west naar oost en valt samen met de x-as. De westelijke ingang van het park ligt tien meter voor het eerste bruggetje. Vijftig meter achter de vierde brug ligt de oostelijke ingang.

1 Wat is de afstand tussen de twee ingangen van het park?

....

....

....

....

....

2 Wat is de onderlinge afstand tussen de vier bruggetjes?

....

....

....

....

....

....

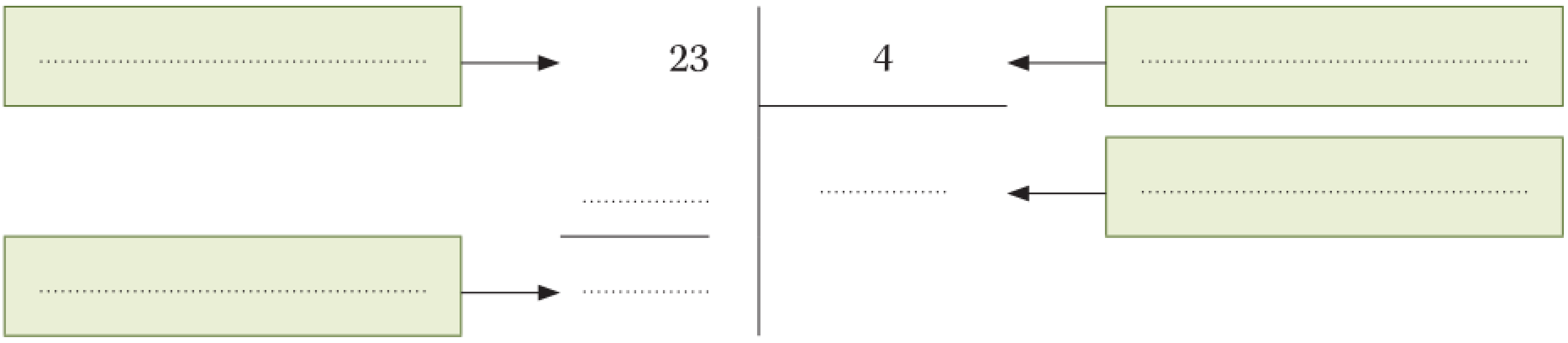
Euclidische deling

12 Instap

Een klas telt 23 leerlingen. Voor een groepswerk wiskunde verdeelt de leraar de leerlingen in groepjes van vier.



1 a Voer de deling uit.



b Hoeveel groepjes tellen juist vier leerlingen? ....

c Hoeveel leerlingen blijven er over na de verdeling? ....

d Vul de praktische schikking aan met: deeltal, deler, quotiënt en rest.

2 Schrijf met de gevonden getallen:

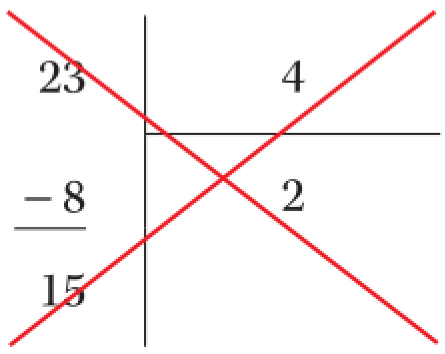
deeltal = deler · quotiënt + rest ....

3 Een pientere leerling merkt op dat de formule onvolledig is. Hij noteert $23 = 4 \cdot 2 + 15$. Dit zou betekenen dat de deling van 23 door 4 als quotiënt 2 heeft en als rest 15. Welke bijkomende voorwaarde ontbreekt in de formule? Vink de juiste uitspraak aan.

De rest is groter dan de deler. ☐

De rest is kleiner dan de deler. ☐

De rest is gelijk aan de deler. ☐



Euclidische deling

Bij de Euclidische deling van twee natuurlijke getallen D en d, is het quotiënt q en de rest r als de getallen D, d, q en r voldoen aan de voorwaarden

$$D = d \cdot q + r \quad \text{en} \quad r < d$$

D, d, q en $r \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $d \neq 0$

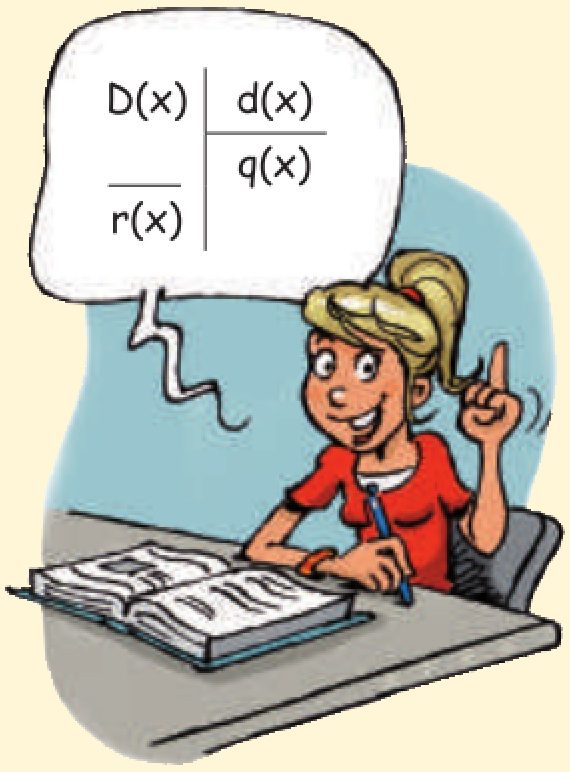


Euclidische deling van veeltermen

Bij de Euclidische deling van twee veeltermen $D(x)$ en $d(x)$, is het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$ als de veeltermen $D(x)$, $d(x)$, $q(x)$ en $r(x)$ voldoen aan de voorwaarden

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{en} \quad gr\big(r(x)\big) < gr\big(d(x)\big) \quad \text{of} \quad r(x) = 0$$

$d(x) \neq 0$



Dit verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest noemen we de **formule van de Euclidische deling**.

De rest $r(x)$ is gelijk aan nul bij een **opgaande deling** en verschillend van nul bij een **niet-opgaande deling**.

Voorbeeld

Bij de Euclidische deling van $D(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 7$ door $d(x) = x^2 - 3$ is het quotiënt $q(x) = x + 2$ en de rest $r(x) = x - 1$.

We kunnen narekenen:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 7 = (x^2 - 3)(x + 2) + (x - 1)$$

$(x^2 - 3)(x + 2) + (x - 1)$
$= x^3 + 2x^2 - 3x - 6 + x - 1$
$= x^3 + 2x^2 - 2x - 7$

We stellen vast:
de graad van de rest $r(x) = x - 1$ is kleiner dan de graad van de deler $d(x) = x^2 - 3$.

$gr(x - 1) = 1$ en $gr(x^2 - 3) = 2$

13

Bij de Euclidische deling van twee veeltermen $D(x)$ en $d(x)$ is het quotiënt gelijk aan $q(x)$ en de rest gelijk aan $r(x)$.

1 Aan welke voorwaarden voldoen de veeltermen $D(x)$, $d(x)$, $q(x)$ en $r(x)$?

- $D(x) =$ ……………………………………………………
- gr(………………) < gr (………………) of $r(x) =$ ………………

2 Vervang in de bovenstaande voorwaarden elke veelterm door zijn benaming.

- ……………………………………………………
- ……………………………………………………

14

Zet een vinkje als $q(x)$ en $r(x)$ het quotiënt en de rest zijn van de Euclidische deling van $D(x)$ door $d(x)$. Controleer de voorwaarden waaraan $D(x)$, $d(x)$, $q(x)$ en $r(x)$ moeten voldoen.

1 $D(x) = x^2 - 10$ $d(x) = x - 3$ $q(x) = x + 3$ $r(x) = -1$ ☐

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

2 $D(x) = x^3 + x^2 + 2x - 5$ $d(x) = x^2 + 3x + 5$ $q(x) = x - 2$ $r(x) = 3x + 6$ ☐

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

3 $D(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4$ $d(x) = x - 2$ $q(x) = x^2 + 3x + 5$ $r(x) = 3x + 6$ ☐

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

15

De deling van de veelterm $D(x)$ door $x^2 - 2x - 1$ heeft als quotiënt $3x - 1$ en als rest $3x + 2$. Bepaal de veelterm $D(x)$.

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

Algoritme voor het delen van veeltermen

Om de veelterm $3x^3 - 5x + 8$ te delen door de veelterm $x - 1$ gebruiken we de praktische schikking van de deling.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \hline & \end{array}$$

We rangschikken het deeltal $3x^3 - 5x + 8$ naar dalende machten van x. De ontbrekende machten van x geven we de coëfficiënt 0.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 3x^2 & 3x^2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 5x + 8 & \end{array}$$

De eerste term $3x^2$ van het quotiënt vinden we door de eerste term $3x^3$ van het deeltal te delen door de eerste term x van de deler. Daarna vermenigvuldigen we $3x^2$ met de deler $x - 1$. Het verkregen product $3x^3 - 3x^2$ trekken we af van het deeltal.

We merken op: $-(3x^3 - 3x^2) = -3x^3 + 3x^2$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 3x \\ \cline{1-1} 3x^2 - 5x + 8 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \cline{1-1} -2x + 8 & \end{array}$$

De tweede term $3x$ van het quotiënt vinden we door de eerste term van de veelterm $3x^2 - 5x + 8$ te delen door de eerste term x van de deler. Daarna vermenigvuldigen we $3x$ met de deler $x - 1$. Het verkregen product $3x^2 - 3x$ trekken we af van de veelterm $3x^2 - 5x + 8$.

We merken op: $-(3x^2 - 3x) = -3x^2 + 3x$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 0x^2 - 5x + 8 & x - 1 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + 3x - 2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 5x + 8 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \cline{1-1} -2x + 8 & \\ +2x - 2 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

We herhalen deze werkwijze tot de rest nul is of een veelterm is waarvan de graad kleiner is dan de graad van de deler.

We kunnen narekenen dat $3x^3 - 5x + 8 = (x - 1)(3x^2 + 3x - 2) + 6$.

We stellen vast dat de graad van de rest kleiner is dan de graad van de deler $x - 1$.

16

Bepaal het quotiënt en de rest van de deling. Schrijf het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest. Zet een vinkje als de deling opgaand is.

1 $(x^3 + 3x^2 + 5x + 1) : (x^2 + 4x + 2)$ ☐

$x^3 + 3x^2 + 5x + 1 =$ ……

2 $(2x^3 + 3x^2 - x + 4) : (x^2 + 2)$ ☐

$2x^3 + 3x^2 - x + 4 =$ ……

3 $(3x^3 - 5x^2 - 9x + 15) : (x^2 - 3)$ ☐

$3x^3 - 5x^2 - 9x + 15 =$ ……

4 $(-x^3 + 5x^2 - 2x - 6) : (x^2 - 3x)$

$-x^3 + 5x^2 - 2x - 6 =$ ....

5 $(x^3 - 3x^2 - 7x + 8) : (x - 2)$

$x^3 - 3x^2 - 7x + 8 =$ ....

6 $(-3x^3 - 10x^2 + x + 12) : (x + 3)$

$-3x^3 - 10x^2 + x + 12 =$ ....

7 $(2x^3 - 9) : (x - 2)$

$2x^3 - 9 =$ ……

8 $(x^3 + x) : (x^2 - 2x + 1)$

$x^3 + x =$ ……

9 $(4x^3 + 4) : (x + 1)$

$4x^3 + 4 =$ ……

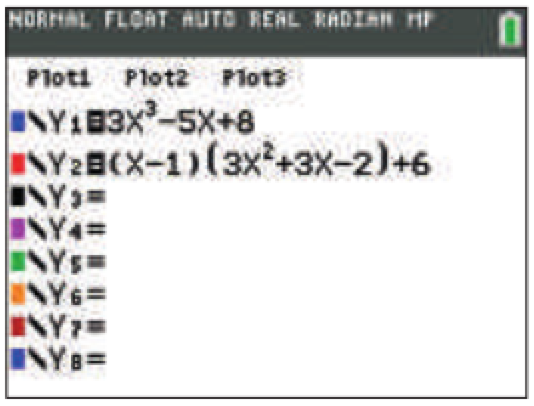
10 $(-2x^3 + 8x + 5) : (x - 3)$

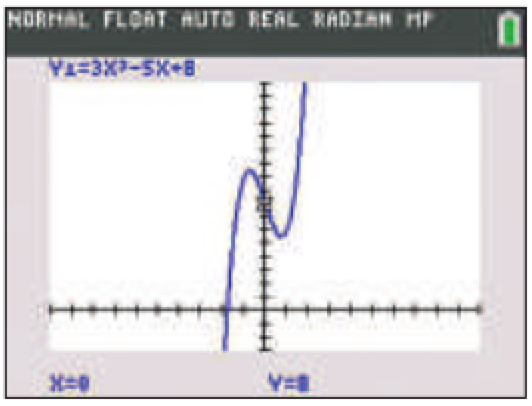
$-2x^3 + 8x + 5 =$ ……………………………………

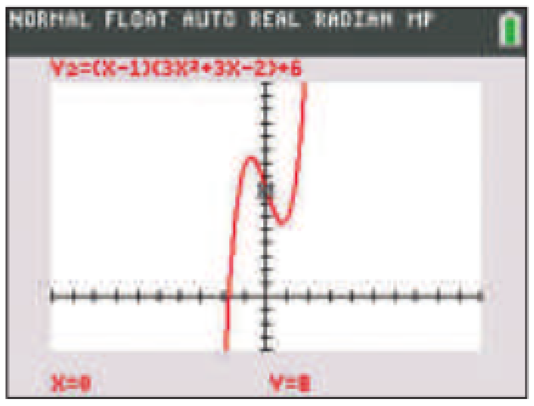
17

Met ICT kunnen we nagaan of een deling met veeltermen juist is uitgevoerd. Van de formule van de Euclidische deling voeren we het linker- en het rechterlid in als functies en controleren of de bijbehorende grafieken samenvallen.

Bijvoorbeeld: $3x^3 - 5x + 8 = (x - 1)(3x^2 + 3x - 2) + 6$ zie pagina 64







Controleer de rekenresultaten van opdracht 16.

Deelbaarheid van veeltermen

Als bij deling van een veelterm $D(x)$ door een veelterm $d(x)$ de rest nul is, dan zeggen we:

$D(x)$ is **deelbaar** door $d(x)$ of $d(x)$ is een **deler** van $D(x)$

Met de formule van de Euclidische deling kunnen we de veelterm $D(x)$ schrijven als een product van twee veeltermen: $D(x) = d(x) \cdot q(x)$ $r(x) = 0$

Voorbeeld

We tonen aan dat $x^3 - 8$ deelbaar is door $x^2 + 2x + 4$ en we schrijven $x^3 - 8$ als een product van twee veeltermen.

- Met de praktische schikking voor de deling berekenen we het quotiënt en controleren we of de rest gelijk is aan nul:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x-8 & x^2+2x+4 \\ \hline -x^3-2x^2-4x & x-2 \\ \hline -2x^2-4x-8 & \\ +2x^2+4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

- Met de formule van de Euclidische deling schrijven we x^3-8 als een product van twee veeltermen:

  $x^3-8=(x^2+2x+4)(x-2)$

18

Toon aan dat de veelterm $D(x)$ deelbaar is door de veelterm $d(x)$ en schrijf $D(x)$ als een product van twee veeltermen.

1 $D(x)=2x^3+5x^2+9x+9$ $\quad d(x)=x^2+x+3$

....

....

....

....

....

$2x^3+5x^2+9x+9=$ ....

2 $D(x)=-x^3+5x^2-7x+3$ $\quad d(x)=x-3$

....

....

....

....

....

....

....

$-x^3+5x^2-7x+3=$ ....

3 $D(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$ $\qquad$ $d(x) = x^2 + x - 2$

$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 =$ ....

4 $D(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ $\qquad$ $d(x) = -x^2 + 1$

$-x^3 - x^2 + x + 1 =$ ....

5 $D(x) = 4x^3 - 108$ $\qquad$ $d(x) = -x + 3$

$4x^3 - 108 =$ ....

Regel van Horner

19 **Instap**

We delen de veelterm $3x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ door $x + 2$. Met de formule van de Euclidische deling schrijven we:

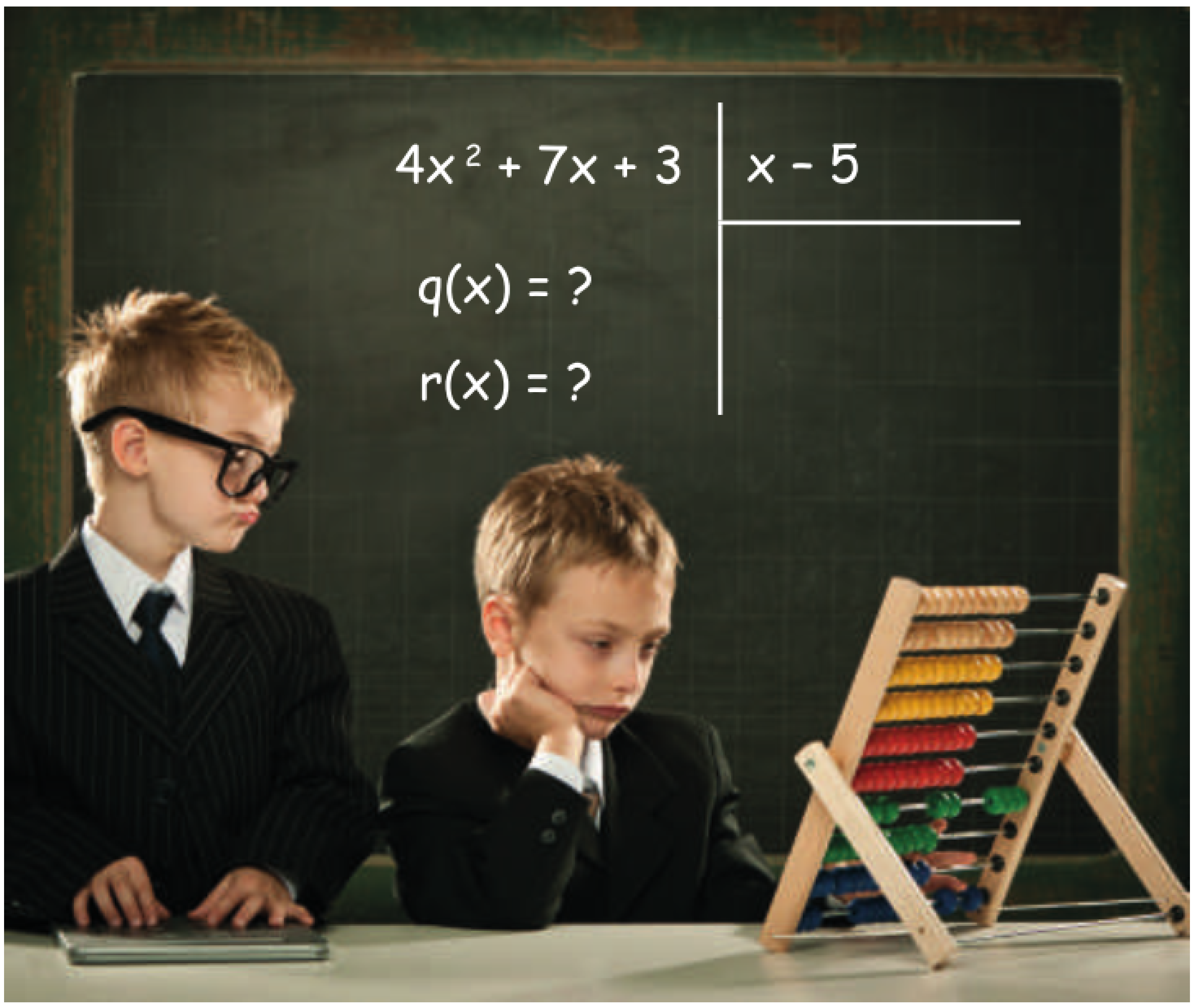
$3x^3 + 4x^2 + 5x - 5 = (x+2) \cdot q(x) + r(x)$ gr($r(x)$) < gr($x + 2$) of $r(x) = 0$

1 Wat is de hoogstegraadsterm van het quotiënt $q(x)$? ....

2 Wat is de graad van de rest $r(x)$? ....

3 Bepaal het quotiënt $q(x)$ en de rest $r(x)$.

$3x^3 + 4x^2 + 5x - 5$	$x + 2$
$-3x^3 - 6x^2$	.... → $q(x) =$ ....
$-2x^2 + 5x - 5$	
$+2x^2 + 4x$	
$9x - 5$	
$-9x - 18$	
....	→ $r(x) =$ ....

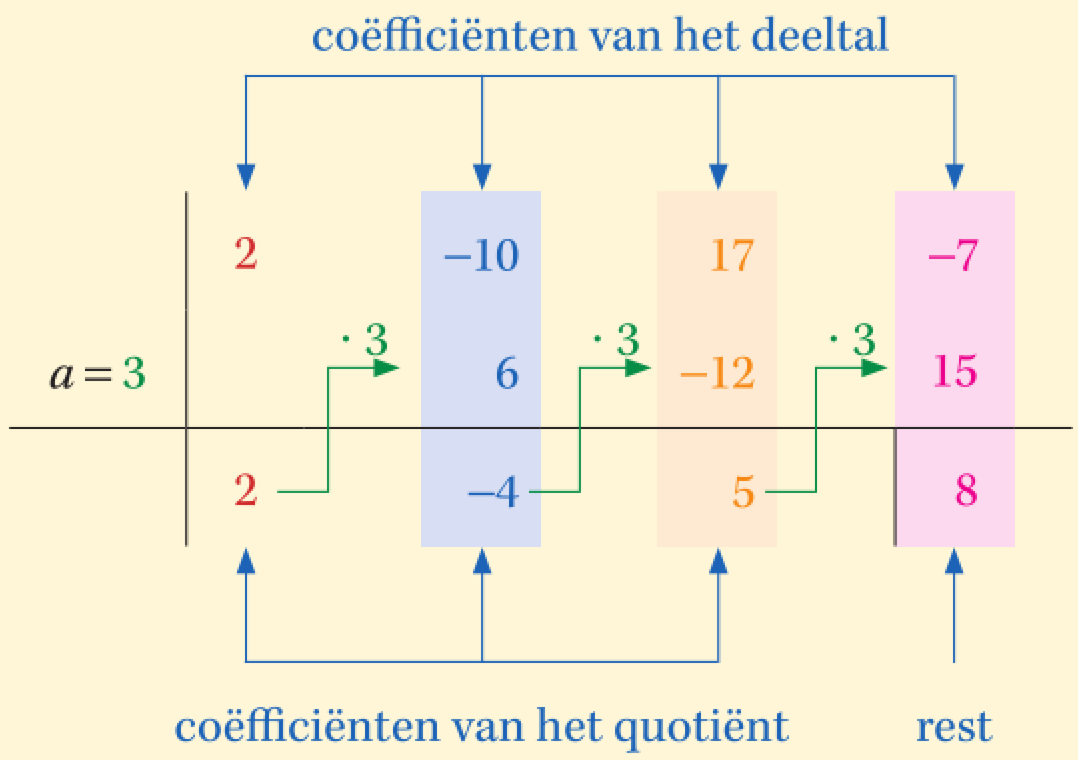


Quotiënt en rest bepalen bij deling door $x - a$

In de praktische schikking voor het delen van de veelterm $2x^3 - 10x^2 + 17x - 7$ door $x - 3$ zoeken we de berekeningen die nodig zijn om de coëfficiënten van het quotiënt en de rest te bepalen. We vatten deze berekeningen samen in een schema.

In de bovenste rij van het schema staan de coëfficiënten van het deeltal. In de onderste rij staan de coëfficiënten van het quotiënt en de rest.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -10x^2 & +17x & -7 & x-3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +6x^2 & & & 2x^2-4x+5 \\ \cline{1-4}
 & -4x^2 & +17x & -7 & \\
 & +4x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & -7 & \\
 & & -5x & +15 & \\ \cline{3-4}
 & & & 8 &
\end{array}
$$



We gaan stapsgewijs na hoe we de coëfficiënten van het quotiënt en de rest berekenen.

1 De eerste coëfficiënt van het deeltal (2) is de eerste coëfficiënt van het quotiënt (2).

2 We vermenigvuldigen de eerste coëfficiënt van het quotiënt (2) met $a = 3$ en tellen dit product op bij de tweede coëfficiënt van het deeltal. Deze som $(-10 + 2 \cdot 3)$ is de tweede coëfficiënt van het quotiënt (−4).

3 We vermenigvuldigen de tweede coëfficiënt van het quotiënt (−4) met $a = 3$ en tellen dit product op bij de derde coëfficiënt van het deeltal. Deze som $(17 + (-4) \cdot 3)$ is de derde coëfficiënt van het quotiënt (5).

4 We herhalen deze werkwijze tot de laatste coëfficiënt van het deeltal.
Deze som $(-7 + 5 \cdot 3)$ is de rest van de deling (8).

In de onderste rij van het schema lezen we de coëfficiënten van het quotiënt af. Omdat de graad van het quotiënt één lager is dan de graad van het deeltal, schrijven we:

$$q(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

Het laatste getal uit de onderste rij is gelijk aan de rest. We stellen de rest voor met de letter r omdat de rest een reëel getal is.

$r = 8$ **graad rest < graad deler**

Het algoritme om op een snelle wijze het quotiënt en de rest van een deling door $x - a$ te berekenen, noemen we **de regel van Horner** naar William George Horner (1786-1837).

Merk op

We schrijven 0 als coëfficiënt in het schema van Horner als in het deeltal een macht van x ontbreekt.

Voorbeeld

We berekenen het quotiënt en de rest van de deling van $2x^4 + 3x^3 - 2x + 5$ door $x + 4$.

	2	3	0	−2	5	$2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 2x + 5$
$a = -4$		−8	20	−80	328	
	2	−5	20	−82	333	

$q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 20x - 82$ $\quad$ $gr(q(x)) = 4 - 1 = 3$

$r = 333$

20

Bepaal het quotiënt en de rest van de deling met de regel van Horner. Schrijf het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest.

1 $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 7) : (x - 1)$

	....
$a =$	....
	....

$q(x) =$ .... $r =$ ....

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 7 =$ ....

2 $(x^3 - 4x^2 + 5x - 3) : (x - 2)$

$a =$ ....

$q(x) =$ .... $r =$ ....

$x^3 - 4x^2 + 5x - 3 =$ ....

3 $(3x^3 + 5x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

$a =$ ....

$q(x) =$ .... $r =$ ....

$3x^3 + 5x^2 + 3x + 1 =$ ....

4 $(2x^3 - 3x^2 - 7) : (x - 2)$

$a =$ ....

$q(x) =$ .... $r =$ ....

$2x^3 - 3x^2 - 7 =$ ....

5 $(-x^3 - 2x^2 + x) : (x + 3)$

$a =$ ....

$q(x) =$ .... $r =$ ....

$-x^3 - 2x^2 + x =$ ....

6 $(-2x^3+3x^2):(x+1)$

	....
$a=$	....
	....

$q(x)=$ .... $r=$ ....

$-2x^3+3x^2=$ ....

7 $(5x^3 - 50x+1):(x-3)$

	....
$a=$	....
	....

$q(x)=$ .... $r=$ ....

$5x^3 - 50x+1=$ ....

21

Bepaal het quotiënt en de rest van de deling. Gebruik de regel van Horner indien mogelijk. Schrijf het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest.

1 $(3x^3-x+3):(x+2)$

$q(x)=$ ....

$r(x)=$ ....

$3x^3-x+3=$ ....

2 $(3x^3 - x + 3) : (x^2 + 2)$

$q(x) =$ ....

$r(x) =$ ....

$3x^3 - x + 3 =$ ....

3 $x^3 : (x - 4)$

$q(x) =$ ....

$r(x) =$ ....

$x^3 =$ ....

4 $(2x^3 - 6x^2 - 4x + 5) : (2x^2 - 1)$

$q(x) =$ ....

$r(x) =$ ....

$2x^3 - 6x^2 - 4x + 5 =$ ....

Reststelling

22 Instap

1 Bepaal het quotiënt en de rest van de delingen met de regel van Horner.

$(x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$

$q(x) =$ ....

$r =$ ....

$(x^2 + 5x + 17) : (x + 3)$

$q(x) =$ ....

$r =$ ....

$(2x^2 + 4x + 1) : (x - 3)$

$q(x) =$ ....

$r =$ ....

$(3x^2 + 3x + 5) : (x + 1)$

$q(x) =$ ....

$r =$ ....

2 Bereken de getalwaarden en vul de tabel in.

deeltal $D(x)$	deler $x - a$	getalwaarde $D(a)$
$x^2 + 3x - 1$	$x - 2$	
$x^2 + 5x + 17$	$x + 3$	
$2x^2 + 4x + 1$	$x - 3$	
$3x^2 + 3x + 5$	$x + 1$	

3 Vergelijk de getalwaarde $D(a)$ met de rest r van de deling van $D(x)$ door $x - a$. Wat stellen we vast?

....

Reststelling

De rest van de deling van een veelterm $D(x)$ door $x - a$ is gelijk aan de getalwaarde $D(a)$.

Met deze stelling kunnen we de rest van een deling door $x - a$ bepalen zonder de deling uit te voeren.

Voorbeeld

We bepalen de rest van de deling van de veelterm $D(x) = x^3 - 2x + 5$ door $x + 2$ zonder de deling uit te voeren. Volgens de reststelling is de rest r gelijk aan $D(-2)$.

$$
\begin{aligned}
D(-2) &= (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 5 \\
&= -8 + 4 + 5 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Bijgevolg: $r = 1$

Reststelling bewijzen

We kunnen de reststelling aantonen met de formule van de Euclidische deling.

$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ — $gr(r(x)) < gr(d(x))$

$D(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$ — $d(x) = x - a$ en $r(x) = r$

$D(a) = (a - a) \cdot q(a) + r$ — getalwaarde van $D(x)$ voor $x = a$

$D(a) = 0 \cdot q(a) + r$

$D(a) = r$

Merk op

Getalwaarden van veeltermen berekenen met de regel van Horner kan rekenvoordeel opleveren omdat we het rekenen met grote getallen omzeilen.

23

Bepaal de rest van de deling van $D(x)$ door $d(x)$. Zet een vinkje als de deling opgaand is.

1 $D(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$ $d(x) = x - 1$ ☐

$r =$ ....

2 $D(x) = 5x^2 + 3x - 2$ $d(x) = x + 1$ ☐

$r =$ ....

3 $D(x) = x^3 - 2x + 2$ $d(x) = x - 2$ ☐

$r =$ ....

4 $D(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3$ $\qquad d(x) = x - 4$ ☐

$r =$ ....

5 $D(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ $\qquad d(x) = x + 4$ ☐

$r =$ ....

6 $D(x) = -3x^3 + 5x^2 + 4x - 2$ $\qquad d(x) = x + 1$ ☐

$r =$ ....

7 $D(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ $\qquad d(x) = x + 2$ ☐

$r =$ ....

8 $D(x) = -x^3 + 125$ $\qquad d(x) = x - 5$ ☐

$r =$ ....

24

Bepaal p zodat de deling de gegeven rest heeft.

1 $(2x^3 + px^2 - x - 7) : (x - 2)$ $\qquad r = 3$

....

....

....

....

2 $(4x^2 - 4px + p^2) : (x + 1)$ $\qquad r = 0$

....

....

....

....

....

3 $(p^2x^2 - 3px + 5) : (x - 3)$ $r = 3$

....

....

....

....

....

....

Deelbaarheid door *x* – *a*

Een veelterm $D(x)$ is deelbaar door $x - a$ als de rest van de deling nul is. Volgens de reststelling is de rest gelijk aan de getalwaarde $D(a)$.

Kenmerk van deelbaarheid door *x* – *a*

Een veelterm *D*(*x*) is deelbaar door *x* – *a* als en slechts als de getalwaarde *D*(*a*) gelijk is aan nul.

Voorbeeld

We tonen aan dat de veelterm $D(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ deelbaar is door $x + 2$ en ontbinden $D(x)$ in twee factoren.

We berekenen:

$$D(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 6$$
$$= -16 + 12 + 10 - 6$$
$$= 0$$

De veelterm $D(x)$ is deelbaar door $x + 2$.

We bereken het quotiënt $q(x)$ met de regel van Horner.

	2	3	–5	–6
$a = -2$		–4	2	6
	2	–1	–3	0

Met de formule van de Euclidische deling kunnen we $D(x)$ ontbinden in twee factoren:

$$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = (x + 2)\,(2x^2 - x - 3)$$

25

Zet een vinkje als de veelterm $D(x)$ deelbaar is door $d(x)$.

1 $D(x) = 3x^3 - 2x + 4$ $\quad d(x) = x + 2$ ☐

....

2 $D(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$ $\quad d(x) = x + 3$ ☐

....

3 $D(x) = -2x^3 + 5x - 7$ $\quad d(x) = x - 2$ ☐

....

4 $D(x) = x^3 + 8x^2 + 6x - 45$ $\quad d(x) = x + 5$ ☐

....

5 $D(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x + 12$ $\quad d(x) = x - 4$ ☐

....

26

Toon aan dat de veelterm $f(x)$ deelbaar is door $d(x)$ en ontbind $f(x)$ in twee factoren.

1 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

$d(x) = x - 2$

$f($ .... $) =$ ....

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 =$ ....

	......	......	......	......
$a =$		......	......	......
	......	......	......	......

2 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$

$d(x) = x - 1$

$f($ .... $) =$ ....

$3x^3 + x^2 - 8x + 4 =$ ....

	......	......	......	......
$a =$		......	......	......
	......	......	......	......

3 $f(x) = 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3$

$d(x) = x + 1$

$f($ .... $) =$ ....

$3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 =$ ....

	......	......	......	......
$a =$		......	......	......
	......	......	......	......

4 $f(x) = -3x^3 - 7x^2 + 4$

$d(x) = x + 2$

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$-3x^3 - 7x^2 + 4 = \ldots\ldots$

	......	......	......	......
$a = \ldots$		......	......	......
	......	......	......	......

5 $f(x) = x^3 - 27$

$d(x) = x - 3$

$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$x^3 - 27 = \ldots\ldots$

	......	......	......	......
$a = \ldots$		......	......	......
	......	......	......	......

6 $f(x) = 8x^3 + 64$

$d(x) = x + 2$

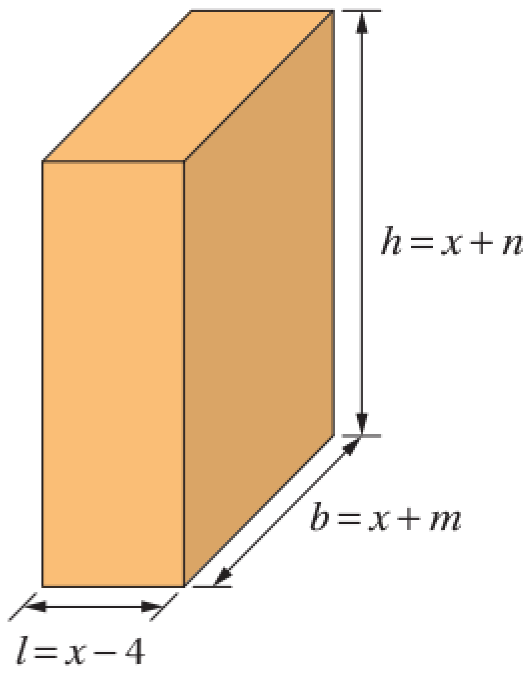
$f(\ldots\ldots) = \ldots\ldots$

$8x^3 + 64 = \ldots\ldots$

	......	......	......	......
$a = \ldots$		......	......	......
	......	......	......	......

27

Het volume van de balk kunnen we berekenen met de formule $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$.



1 Bepaal de gehele getallen m en n als de hoogte groter is dan de breedte.

....

....

....

....

....

2 Bereken de afmetingen en het volume van de balk als x gelijk is aan 10 cm.

Delers $x - a$ opzoeken

Als een veelterm $D(x)$ met gehele coëfficiënten deelbaar is door $x - a$, met a een geheel getal, dan is a een deler van de constante term van $D(x)$.

Bijgevolg kunnen alleen delers a van de constante term van $D(x)$, delers van de vorm $x - a$ opleveren.

Voorbeeld

We zoeken alle delers $x - a$ met a een geheel getal van de veelterm $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.

Delers van de constante term -6 zijn 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6 en –6.

a	1	–1	2	–2	3	–3	6	–6
$D(a)$	–6	0	12	0	60	–18	504	–300

Delers van de veelterm $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ zijn $x + 1$ en $x + 2$.

Delers $x - a$ opzoeken

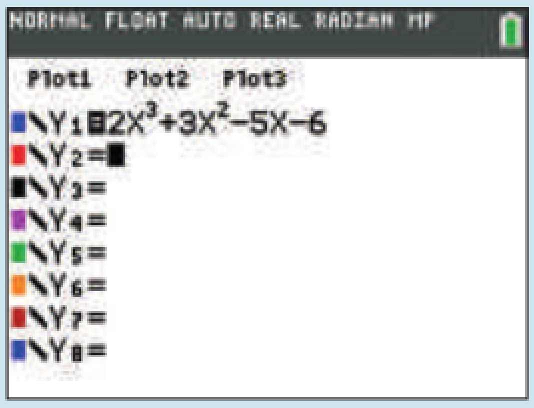
We bepalen alle delers $x - a$ van de veelterm $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ met a een geheel getal.

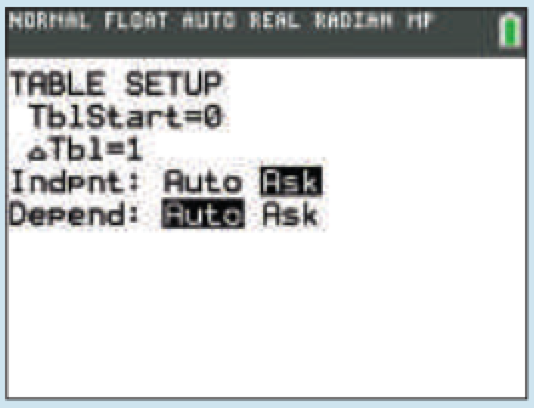
TEXAS INSTRUMENTS

We voeren de bijbehorende veeltermfunctie in. Daarna roepen we het scherm TABLE SETUP op. We stellen Ask in bij Indpnt (onafhankelijke variabele x) en Auto bij Depend (afhankelijke variabele y).

- [Y=] $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

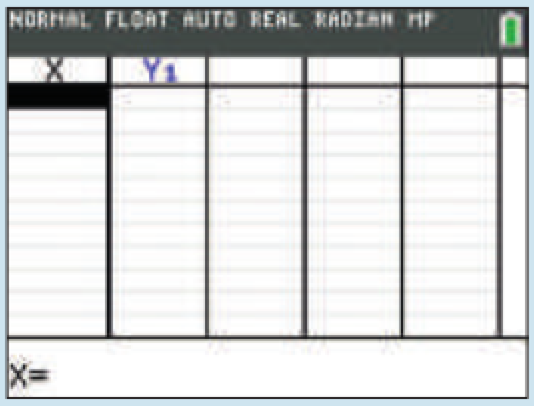
  [2ND] [TBLSET] [▼: 2-maal] [▶] [ENTER]

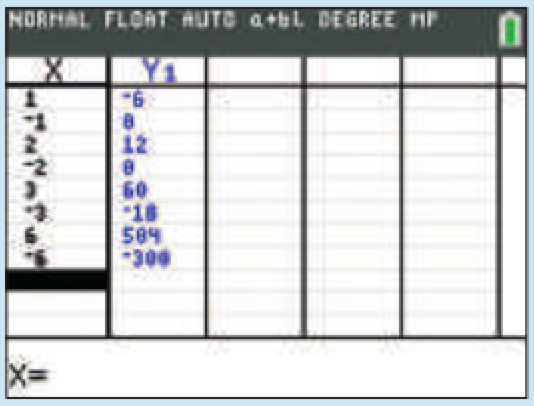




In de X-kolom voeren we alle gehele delers van de constante term –6 in en automatisch verschijnen de functiewaarden in de Y1-kolom.

- [2ND] [TABLE] 1 [▼] –1 [▼] 2 [▼] –2 [▼] 3 [▼] –3 [▼] 6 [▼] –6 [▼]





De veelterm $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ is dus deelbaar door $x + 1$ en $x + 2$ omdat voor $x = -1$ en $x = -2$ de getalwaarde van de veelterm nul is.

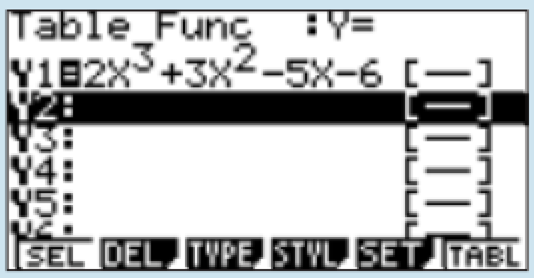
Om een tabel te wissen, drukken we ClrTable uit de cataloog.

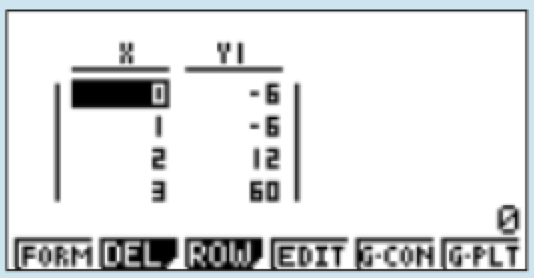
- [2ND] [CATALOG] C [▼: tot ClrTable] [ENTER] [ENTER]

CASIO

In het menu TABLE voeren we de bijbehorende veeltermfunctie in. Daarna roepen we de tabel op met een willekeurige instelling.

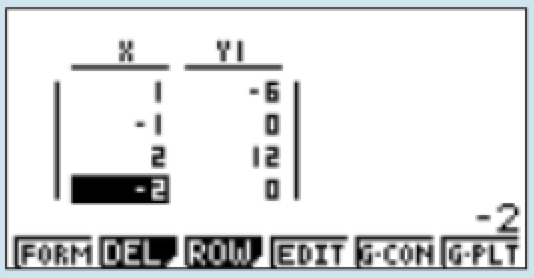
- [MENU] [5: TABLE] $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$ [EXE] [F6 : TABL]

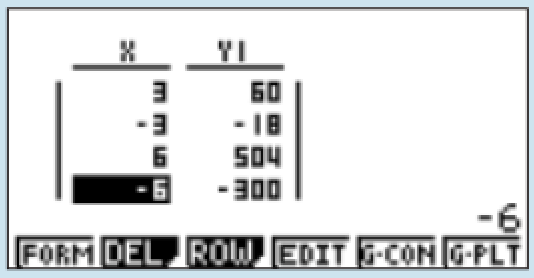




In de X-kolom voeren we alle gehele delers van de constante term –6 in. We vervangen hiertoe de eerste x-waarde door 1 en automatisch verschijnt de functiewaarde –6 in de Y1-kolom. Op de volgende rijen voeren we de overige delers in.

- 1 [EXE] [▼] –1 [EXE] [▼] 2 [EXE] [▼] –2 [EXE] [▼] 3 [EXE] [▼] –3 [EXE] [▼] 6 [EXE] [▼] -6 [EXE]





De veelterm $2x^3+3x^2-5x-6$ is dus deelbaar door $x+1$ en $x+2$ omdat voor $x=-1$ en $x=-2$ de getalwaarde van de veelterm nul is.

Om de gewijzigde tabel te herleiden naar de oorspronkelijke tabel, drukken we de functietoets F2(DEL) en bevestigen met de functietoets F1.

28

Bepaal van de veelterm alle delers $x-a$ met a een geheel getal.

1 x^3+5x^2-x-5 ....

2 $x^3+2x^2-6x-12$ ....

3 x^3-5x^2+8x-4 ....

4 x^3+x^2-4x-4 ....

5 x^3-3x^2+2x-6 ....

6 x^3-2x^2-5x+6 ....

7 x^3-7x^2+15 ....

8 $x^3-19x-30$ ....

29

Bepaal van de veelterm $D(x)$ één deler $x-a$ met a een geheel getal en ontbind de veelterm in twee factoren.

1 $D(x)=x^3-5x+2$

x	......	......	......	......	......	......
$D(x)$	......	......	......	......	......	......

	......	......	......	......
$a=$		......	......	......
	......	......	......	......

$x^3-5x+2=$ ....

2 $D(x) = 2x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$2x^3 + 7x^2 - 6x - 8 =$ ……

3 $D(x) = 3x^3 - 9x^2 - 5x + 15$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$3x^3 - 9x^2 - 5x + 15 =$ ……

4 $D(x) = x^3 + 6x^2 - 6x + 7$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$x^3 + 6x^2 - 6x + 7 =$ ……

5 $D(x) = 2x^3 - 11x^2 + 3x + 10$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$2x^3 - 11x^2 + 3x + 10 =$ ……

6 $D(x) = -x^3 - 2x^2 - 9$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$-x^3 - 2x^2 - 9 =$ ……

7 $D(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

x	……	……	……	……	……	……
$D(x)$	……	……	……	……	……	……

	……	……	……	……
$a =$ ……		……	……	……
	……	……	……	……

$2x^3 + 3x^2 - x + 2 =$ ……

30

De veelterm heeft -12 als constante term. Zet een vinkje bij elke deler a van -12 waarvoor $x-a$ een deler is van de veelterm. Maak gebruik van ICT.

	veelterm	delers van -12											
		1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	6	-6	12	-12
1	$x^4-6x^3+9x^2+4x-12$												
2	$x^3-13x-12$												
3	$x^4+8x^3+11x^2-8x-12$												
4	$x^3+3x^2-4x-12$												
5	$x^4+9x^3-33x^2+35x-12$												

31

Eén van de vijf ontbindingen is die van de veelterm $D(x)=x^3-7x-6$. Welke?

A $(x-1)(x+2)(x-3)$

B $(x+1)(x-2)(x+3)$

C $(x-1)(x-2)(x+3)$

D $(x+1)(x+2)(x-3)$

E $(x-1)(x-2)(x-3)$

....

....

....

Hogeregraadsvergelijkingen

32 Instap

Hogeregraadsvergelijkingen waarin het linkerlid bestaat uit een product van veeltermen van de eerste of de tweede graad en het rechterlid gelijk is aan nul, zijn gemakkelijk op te lossen met de eigenschap 'Product gelijk aan nul'.

1 Vul in: $a \cdot 5 = 0 \quad \Leftrightarrow$ ....

$5 \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow$ ....

2 Schrijf de eigenschap 'Product gelijk aan nul' met symbolen.

$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow$ ....

3 Onderzoek met de eigenschap 'Product gelijk aan nul' welke van de gegeven getallen een oplossing zijn van de vergelijkingen. Duid in het schema de oplossingen aan met een vinkje.

vergelijking	oplossingen						
	0	1	−1	2	−2	3	−3
$2 \cdot x = 0$							
$x \cdot (x-3) = 0$							
$(x+1) \cdot x = 0$							
$(x-2) \cdot (x+3) = 0$							
$(x-1)^2 = 0$							

4 Herleid de derdegraadsvergelijkingen tot een product gelijk aan nul door de gemeenschappelijke factor buiten haakjes te brengen. Los de verkregen vergelijkingen op.

$x^3 - 4x = 0$

....

....

....

....

$x^3 + x = 0$

....

....

....

....

Hogeregraadsvergelijkingen oplossen met de eigenschap 'Product gelijk aan nul'

Om een hogeregraadsvergelijking van de vorm $a \cdot b = 0$ op te lossen:

- stellen we elke factor gelijk aan nul;
- lossen we de verkregen vergelijkingen op.

Met deze methode kunnen we ook hogeregraadsvergelijkingen oplossen waarin de constante term ontbreekt.

Voorbeelden

$(x-1)(x^2-4)=0$

$x-1=0$ of $x^2-4=0$ — **elke factor gelijkstellen aan nul**

$x=1$ $\quad x^2=4$ — **vergelijkingen oplossen**

$x=2$ of $x=-2$

$75x^2-5x^3=0$

$5x^2(15-x)=0$ — **gemeenschappelijke factor $5x^2$ afzonderen**

$5x^2=0$ of $15-x=0$ — **elke factor gelijkstellen aan nul**

$x=0$ $\quad x=15$ — **vergelijkingen oplossen**

33

Los de vergelijking op.

1 $(x+1)(x^2-9)=0$

....

....

....

....

2 $(x+4)(x^2+4)=0$

....

....

....

....

3 $7x^2(3x+5)=0$

....

....

....

....

4 $(3x+1)(2x-5)^2=0$

....

....

....

....

34

Een vlucht met een luchtballon duurt drie uur. De hoogte van de ballon kunnen we beschrijven met de formule:

$h = -100t \cdot (t-1)^2 \cdot (t-3)$

h: hoogte in meter

t: tijd in uur



Op welke tijdstippen staat de ballon aan de grond?

.....

.....

.....

.....

.....

35

Zet een vinkje bij elk functievoorschrift waarmee we de gegeven grafiek kunnen tekenen.

1 $f(x) = x^3 + 3x^2$ ☐

2 $f(x) = x^3 - 3x^2$ ☐

3 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ☐

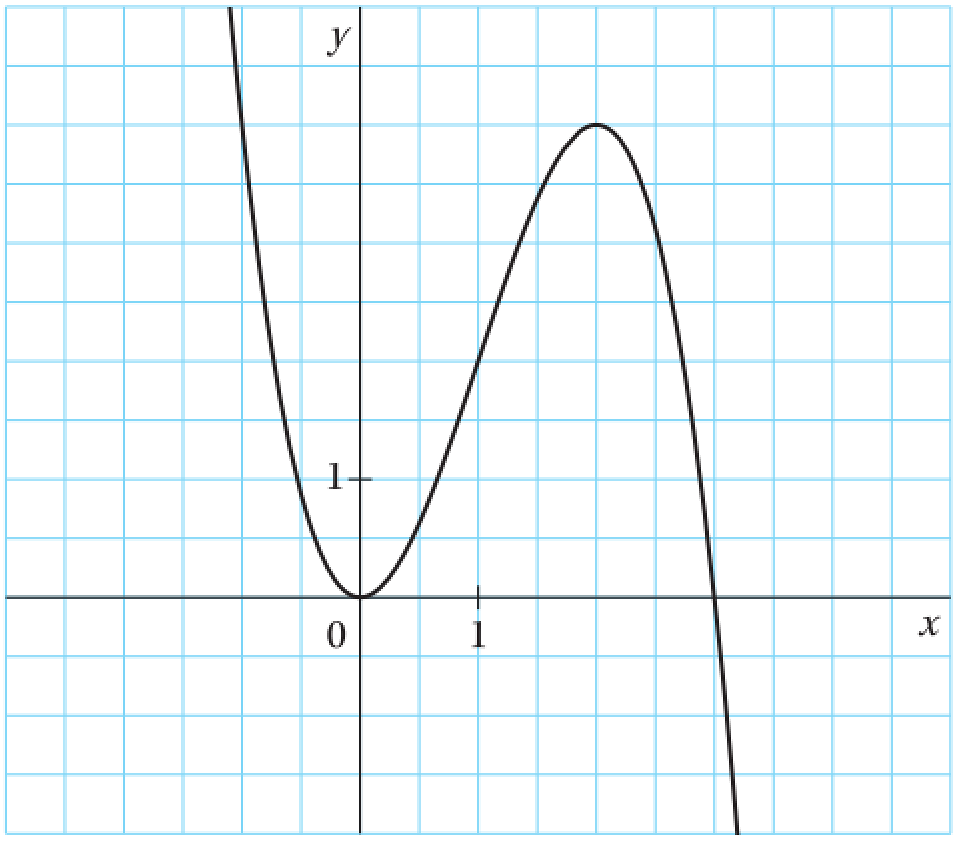
4 $f(x) = -x^2(x+3)$ ☐

5 $f(x) = -x^2(x-3)$ ☐

6 $f(x) = -\frac{1}{3}x^2(3x-1)$ ☐

7 $f(x) = \frac{x-3}{x^2}$ ☐

8 $f(x) = \frac{3-x}{x^2}$ ☐



36

Los de vergelijking op met ICT.

1 $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 5x - 14) = 0$

2 $(2x^2 + 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 0$

3 $x^2(x^2 - 3x - 4) = 0$

4 $(x^2 + 4x - 3)(5x^2 - 3x - 4) = 0$

37

Los de vergelijking op zonder ICT.

1 $x^3 - 4x = 0$

2 $x^4 + x^2 = 0$

3 $x^3 + 2x^2 + x = 0$

4 $2x^4 + 2x = 0$

5 $12x^4 - 5x^3 - 2x^2 = 0$

....

....

....

....

6 $10x^5 - 13x^4 - 3x^3 = 0$

....

....

....

....

Derdegraadsvergelijkingen oplossen met deling door $x - a$

Als a een oplossing van een derdegraadsvergelijking $D(x) = 0$ voorstelt, dan is de getalwaarde $D(a)$ gelijk aan nul. Bijgevolg is de veelterm $D(x)$ deelbaar door $x - a$ en kunnen we de vergelijking $D(x) = 0$ oplossen.

$D(x) = 0$

$(x - a) \cdot q(x) = 0$ — **$q(x)$ is het quotiënt van $D(x)$ door $x - a$**

$x - a = 0$ of $q(x) = 0$ — **elke factor gelijkstellen aan nul**

De vergelijking $x - a = 0$ heeft a als oplossing.
De vergelijking $q(x) = 0$ is een tweedegraadsvergelijking die we kunnen oplossen.

Voorbeeld

We lossen de vergelijking $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$ op.

We zoeken een deler $x - a$ met a een geheel getal van de veelterm $6x^3 - 13x^2 + x + 2$.

Delers van de constante term 2 zijn 1, –1, 2 en –2.

a	1	–1	2	–2
$D(a)$	–4	–18	0	–100

Een deler van de veelterm $6x^3 - 13x^2 + x + 2$ is $x - 2$.

We lossen de vergelijking op:

$6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$

$6x^3 - 13x^2 + x + 2$ delen door $x - 2$

	6	−13	1	2
$a = 2$		12	−2	−2
	6	−1	−1	0

$(x-2)(6x^2 - x - 1) = 0$

$q(x) = 6x^2 - x - 1$

$x - 2 = 0 \quad \text{of} \quad 6x^2 - x - 1 = 0$

elke factor gelijkstellen aan nul

$x = 2 \qquad x = \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad x = -\frac{1}{3}$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 > 0$

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Merk op

Een derdegraadsvergelijking heeft hoogstens drie oplossingen.
Een derdegraadsvergelijking die geen enkele gehele oplossing heeft, kunnen we met deze methode niet oplossen.

38

Los de derdegraadsvergelijking op.

1 $6x^3 - 17x^2 - 31x + 12 = 0$

x	....
$D(x)$	....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2 $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 = 0$

x	....
$D(x)$	....

3 $x^3 + x^2 - 10x - 12 = 0$

x	....
$D(x)$	....

4 $x^3 + 5x^2 + 7x + 12 = 0$

x	....
$D(x)$	....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 $x^3 - 7x + 6 = 0$

x	....
$D(x)$	....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

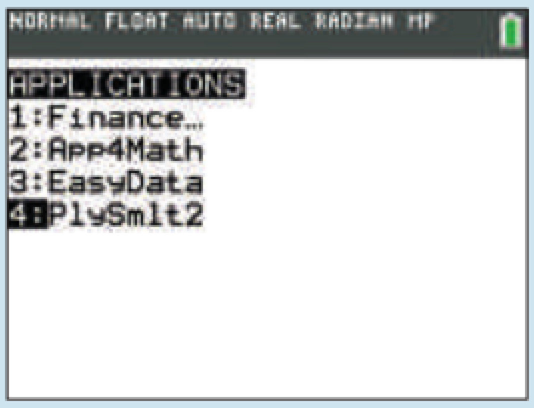
Derdegraadsvergelijkingen oplossen

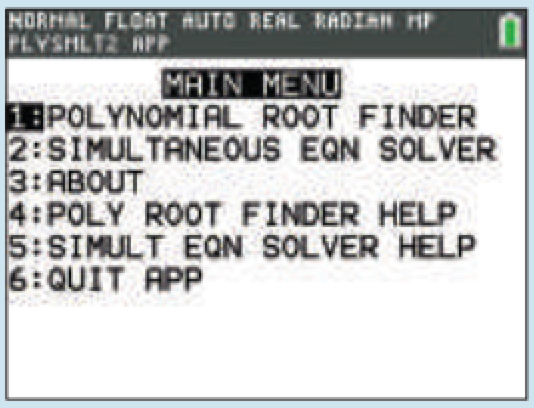
We berekenen de oplossingen van de derdegraadsvergelijking $6x^3 - 13x^2 + x + 2 = 0$.

TEXAS INSTRUMENTS

Met de toepassingstoets APPS kunnen we de toepassing PlySmlt2 oproepen. In het MAIN MENU kiezen we de optie POLY ROOT FINDER.

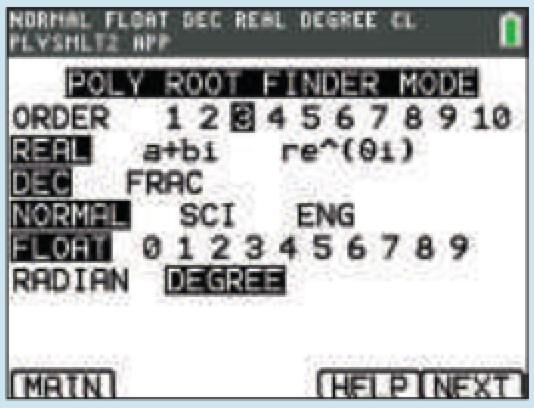
- [APPS] [4: PlySmlt2] [ENTER] [1: POLYNOMIAL ROOT FINDER]

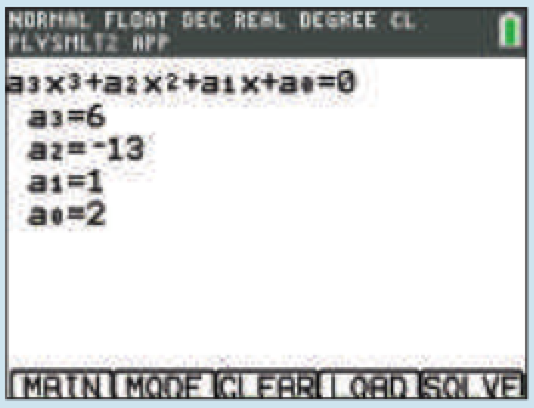




We voeren de graad 3 van de vergelijking in en kiezen voor een decimale notatie van de oplossingen. We drukken de toets F5 (NEXT) en voeren de coëfficiënten in.

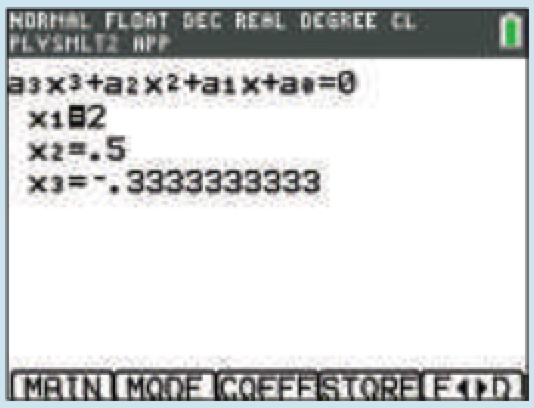
- [F5: NEXT] 6 [ENTER] –13 [ENTER] 1 [ENTER] 2





We drukken de toets F5 (SOLVE) om de vergelijking op te lossen.

- [F5: SOLVE]

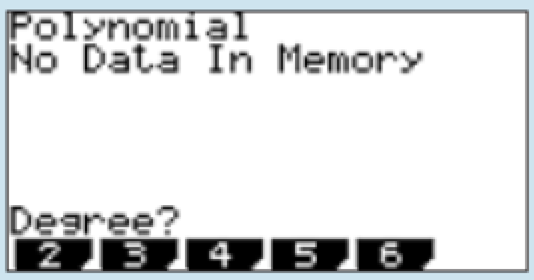


De oplossingen van de vergelijking zijn 2 ; 0,5 en –0,33... .

CASIO

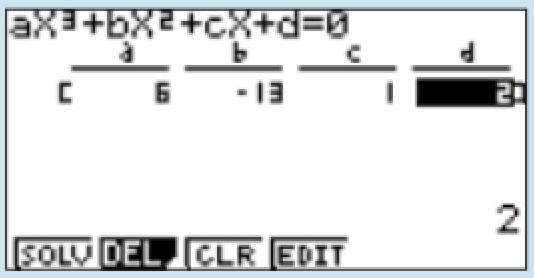
In het menu EQUA kiezen we voor het submenu Polynomial.

- [MENU] [8: EQUA] [F2: POLY]



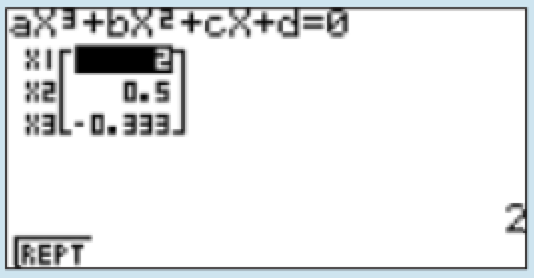
We voeren de graad 3 van de vergelijking in. Daarna voeren we de coëfficiënten in.

- [F2 : 3] 6 [EXE] −13 [EXE] 1 [EXE] 2 [EXE]



We drukken de toets F1 (SOLV) om de vergelijking op te lossen.

- [F1: SOLV]



De oplossingen van de vergelijking zijn 2 ; 0,5 en −0,33... .

39

Los op met ICT. Rond af op 2 decimalen.

1 $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$

....

2 $x^3 - 3x - 2 = 0$

....

3 $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$

....

4 $x^3 - 4x^2 + 8 = 0$

....

40

Controleer met ICT de rekenresultaten van opdracht 38.

41

Een meubelfabrikant ontwerpt met zijn computer de volgende zetel.






Een profieldoorsnede van de zitting bekomen we met de grafiek van de functie

$$f(x) = -\frac{1}{10\,000}(500x^3 - 7750x^2 + 35\,875x - 52\,062{,}5) \quad \text{met} \quad \text{dom}\, f = [0, 10]$$

De grootheid x is uitgedrukt in decimeter. De zitting wordt aan het onderstel bevestigd met schroeven. De gaten voor deze schroeven komen overeen met de nulwaarden van de functie f.

Bepaal de plaats van de bevestigingspunten.

....

....

....

....

....

42

De doorsnede van een rivier kunnen we beschrijven met de functie

$$f(x) = \frac{1}{10\,000}(x^4 - 23x^3 + 633x^2 + 1333x - 50\,000) \quad \text{met} \quad \text{dom}\, f = [-10, 12]$$

De grootheid x is uitgedrukt in meter.



1 Wat is de breedte van de rivier als het waterpeil samenvalt met de x-as?

2 Wat is de breedte van de rivier als het waterpeil twee meter stijgt?

Bikwadratische vergelijkingen

Vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$ met $a \neq 0$ noemen we **bikwadratische vergelijkingen**. Deze vergelijkingen kunnen we oplossen door ze te herleiden tot tweedegraadsvergelijkingen.

Voorbeeld

In de bikwadratische vergelijking vervangen we x^2 door y en verkrijgen zo een tweedegraadsvergelijking in y.

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$	**bikwadratische vergelijking**
$4y^2 - 5y + 1 = 0$	**x^2 vervangen door y**
$y = 1$ of $y = \frac{1}{4}$	**tweedegraadsvergelijking oplossen**
$x^2 = 1$ $x^2 = \frac{1}{4}$	**y vervangen door x^2**
$x = 1$ of $x = -1$ $x = \frac{1}{2}$ of $x = -\frac{1}{2}$	**tweedegraadsvergelijkingen oplossen**

43

Los op zonder ICT.

1 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

....

....

....

....

2 $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

....

....

....

....

3 $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

4 $x^4 + x^2 - 6 = 0$

5 $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$

6 $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

44

Een zandbank steekt bij laagtij drie meter boven de zeespiegel uit en ligt bij hoogtij een meter onder water. De vorm van de zandbank bij hoogtij is te beschrijven met de formule $y = -0{,}000001x^4 + 0{,}0004x^2 - 1$ waarbij x en y afstanden in meter voorstellen.



1 Teken met ICT de grafiek van de zandbank bij hoogtij.

2 Schrijf de formule voor de vorm van de zandbank bij laagtij en teken met ICT de grafiek.

....

3 Wat is de zichtbare lengte van de zandbank bij laagtij?

....

....

....

....

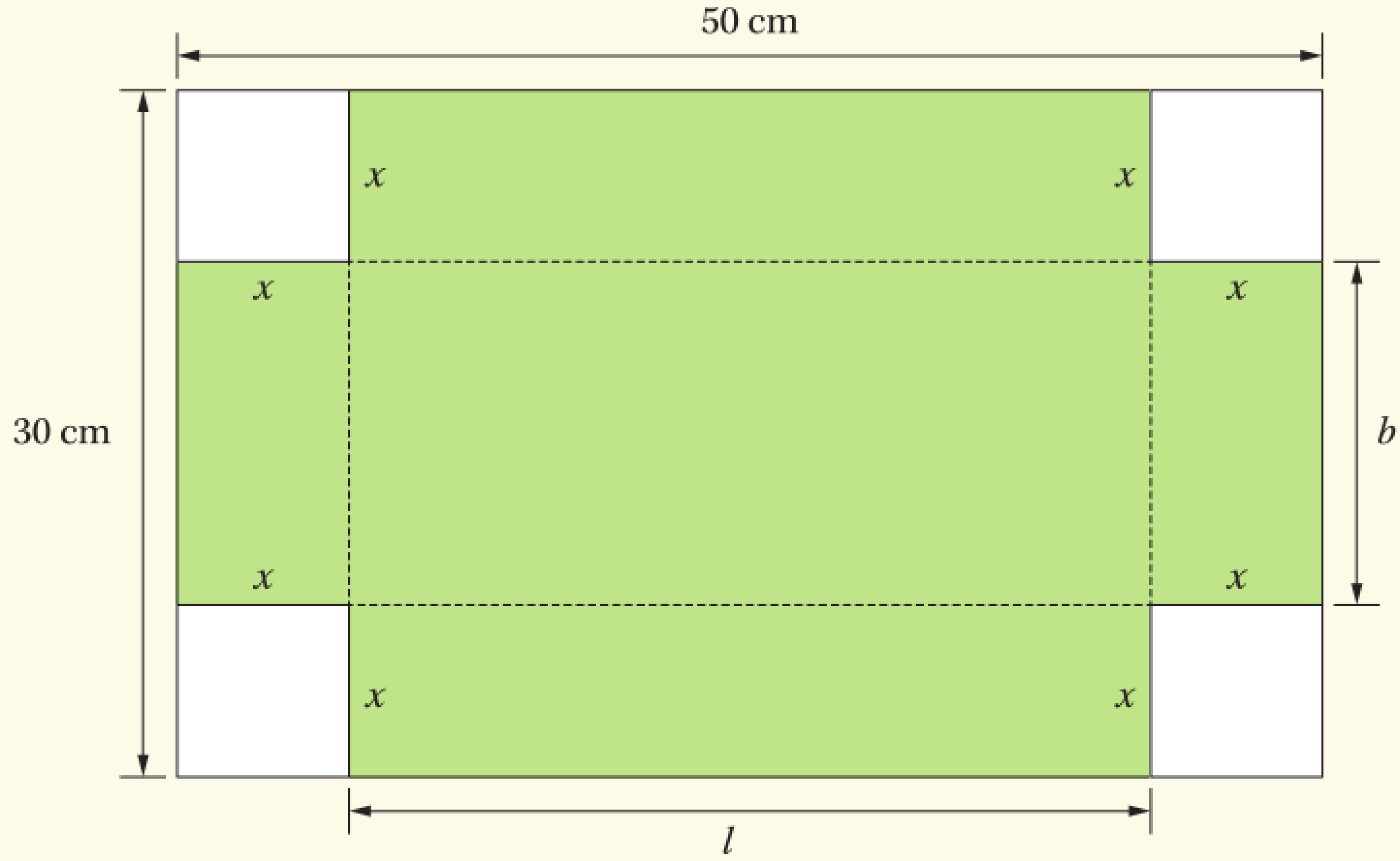
....

....

....

Uitdagingen

1 We knippen aan de vier hoeken van een rechthoekig stuk karton van 30 cm bij 50 cm vier gelijke vierkanten met zijde x cm weg. Het overblijvende deel vouwen we tot een doos zonder deksel.



1 De lengte l, breedte b en hoogte h van de doos zijn functies van x.
Noteer deze functies met de formulenotatie.

2 Schrijf het volume van de doos als een functie van x. Noem de functie f en vul het functievoorschrift aan met het werkdomein.

3 Waarom is het getal 15 geen nulwaarde van f?

zie pagina 299

2 Bij het wegontwerp van een autosnelweg wordt de bestaande helling van de bodem langs de aan te leggen weg beschreven met de functie $w(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}5x^2 - 0{,}3$ in de sectie $[-2{,}25 ; 2{,}25]$. De wegas valt samen met de x-as en de eenheid op de x-as en de y-as komt overeen met 100 meter.

1 Teken met ICT de grafiek.

2 Hoeveel stroken grond moeten er in de beschreven sectie afgegraven worden om de ontworpen rijweg aan te leggen?

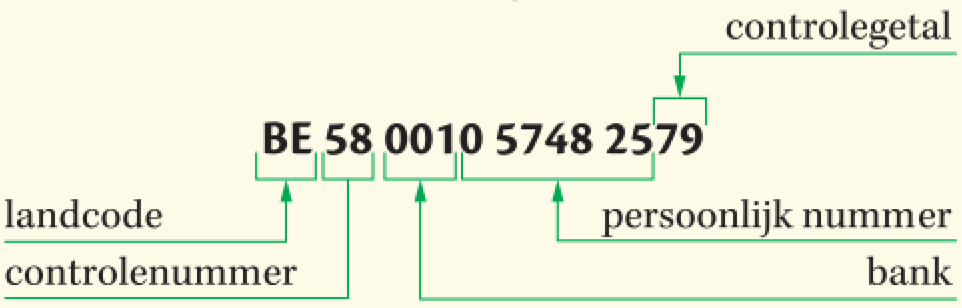
3 Hoe lang zijn de af te graven stroken?

4 Wat is de lengte van het aan te leggen viaduct boven de vallei?

5 Hoe hoog is de middelste pijler van het viaduct, gemeten vanaf de grond tot het wegdek?

zie pagina 299

3 Het IBAN-nummer (International Bank Account Number) van een bankrekening bestaat uit een landcode van twee letters, een controlenummer van twee cijfers gevolgd door het nationaal rekeningnummer van 12 cijfers. De eerste drie cijfers van dit nummer duiden de bank aan, de volgende groep van zeven cijfers is het persoonlijk nummer van de klant en de laatste twee cijfers vormen het controlegetal.



Het controlegetal is de rest van een deling. Het deeltal bestaat uit de eerste 10 cijfers van het nationaal rekeningnummer en de deler is altijd 97. We controleren de juistheid van het rekeningnummer 001057482579.

$10574825 = 97 \cdot 109018 + 79$




```
1 0 5 7 4 8 2 5 | 9 7
- 9 7           |------------
-------         | 1 0 9 0 1 8
    8 7 4
  - 8 7 3
  -------
      1 8 2
      - 9 7
      -----
        8 5 5
      - 7 7 6
      -------
          7 9
```

1 Vul het IBAN-nummer aan met het controlegetal van het rekeningnummer.

a BE75 0010 1234 56 ?? **b** BE91 0010 9876 54 ??

2 Reken het controlegetal van je eigen rekeningnummer na. Als de rest 0 is, wordt 97 als controlegetal gebruikt.

zie pagina 300

4 Bepaal het quotiënt en de rest van de deling. Schrijf het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest.

1 $(2x^3 + x^2 + 1) : (4x^2 + 5)$ **2** $\left(x^4 + 3x^2 + \frac{8}{9}\right) : (3x^2 + 1)$

zie pagina 302

5 We ontbinden de veelterm $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ in twee factoren. Als de ene factor $x^2 + x + 1$ is, dan is de tweede factor

(A) $x^6 + 1$ **(B)** $x^6 + x^3 + 1$ **(C)** $x^6 + x^4 + x^2 + 1$

(D) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ **(E)** $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

zie pagina 303

6 Als $x^2 - x - 1$ een deler is van $ax^3 + bx^2 + 1$, dan is b gelijk aan

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

Vlaamse Wiskunde Olympiade

zie pagina 303

7 Bepaal p zodat de deling $(2x^3 + 7x^2 + px + 3) : (2x^2 + x + 1)$ opgaat.

zie pagina 304

8 Als $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ deelbaar is door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ dan is $p \cdot (q + r)$ gelijk aan

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21

Ingangsexamen arts

zie pagina 304

9 Bepaal p zodat de delingen $(x^3 - 2x^2 - 2px + 3) : (x - 2)$ en $(x^3 + 3x^2 - px + 5) : (x + 2)$ dezelfde rest hebben.

zie pagina 305

10 Bepaal p en q zodat de veelterm $D(x) = x^4 + px^2 + qx + p$ deelbaar is door $x - 3$ en door $x + 2$.

zie pagina 305

11 Bepaal p zodat de deling $(x^2 - 4px + 2p^2) : (x - 2)$ een rest gelijk aan p heeft.

zie pagina 305

12 Kenmerken van deelbaarheid door $x - 1$ en door $x + 1$.

1 Onder welke voorwaarde voor de coëfficiënten is de veelterm $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deelbaar door $x - 1$?

2 Onder welke voorwaarde voor de coëfficiënten is de veelterm $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deelbaar door $x + 1$?

3 Gegeven zijn de veeltermen:

$D_1(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

$D_2(x) = 4x^3 - 5x^2 - x + 2$

$D_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 1$

$D_4(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

$D_5(x) = -3x^3 - 2x^2 - 1$

$D_6(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

Welke veeltermen zijn deelbaar door $x - 1$? Door $x + 1$? Door $x - 1$ en door $x + 1$?

zie pagina 306

13 We onderzoeken het kenmerk van deelbaarheid door $(x-a)(x-b)$.
Gegeven is de veelterm $D(x)=x^7-x^5+7x^2-7$.

1 Toon aan dat $D(x)$ deelbaar is door $x-1$ en door $x+1$.

2 Toon aan dat $D(x)$ deelbaar is door het product $(x-1)(x+1)$.

3 Vervolledig het kenmerk van deelbaarheid door $(x-a)(x-b)$.

Een veelterm D(x) is deelbaar door (x – a) (x – b) met a ≠ b als ....

4 Toon aan dat $D(x)=x^5+x^4-6x^3+3x^2+3x-18$ deelbaar is door $(x-2)(x+3)$ zonder de deling uit te voeren.

zie pagina 306

14 Toon aan dat de veelterm $D(x)=3x^3-8x^2-x+10$ deelbaar is door x^2-x-2 zonder de deling uit te voeren.

zie pagina 307

15 Bepaal het voorschrift van een derdegraadsfunctie met nulwaarden 0, 2, –2 en waarbij $f(-1)=6$.

zie pagina 308

16 Los op zonder ICT.

1 $x^2(x-2)-(x-2)=0$

2 $(x+3)(x-4)^2-(x+3)=0$

3 $(x-2)(x^2-4)^2-(x-2)=0$

4 $x^3-x^2-x+1=0$

5 $x^3+5x^2-x-5=0$

6 $x^4-3x^3+2x^2-6x=0$

7 $3x^3-8x^2-5x+6=0$

8 $x^4+3x^3-3x^2+3x-4=0$

zie pagina 308

17 De functie $f(x)=x^4-14x^3+68x^2-136x+96$ heeft een dubbele nulwaarde 2. Bepaal zonder ICT alle nulwaarden.

zie pagina 310

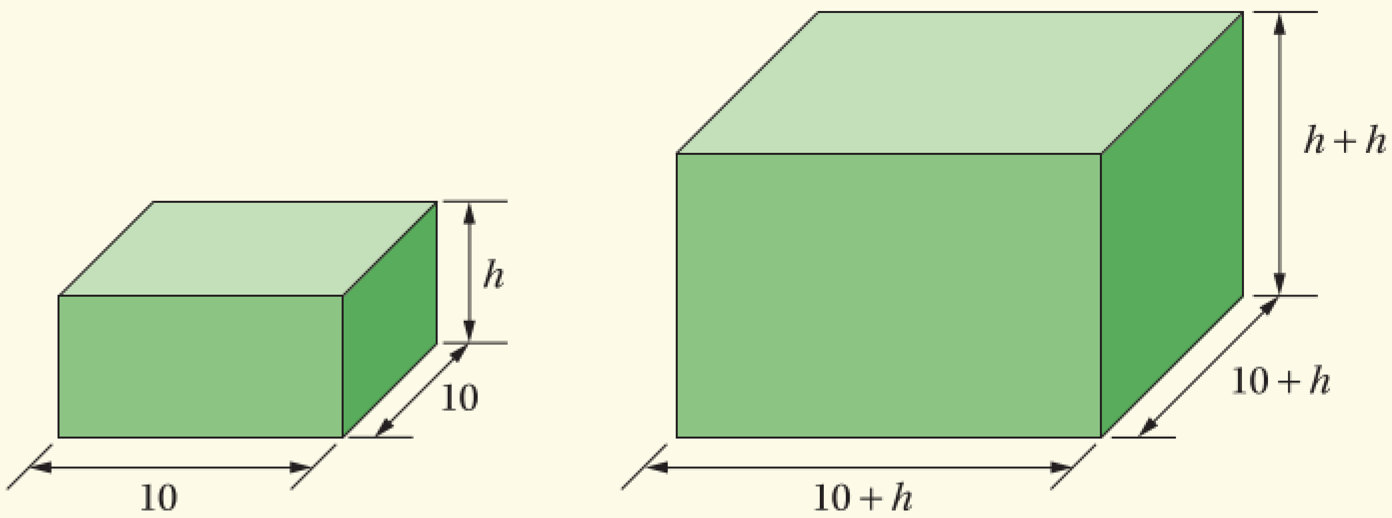
18 Gegeven is de vergelijking $18x^3-15x^2-x+2=0$.

1 Waarom kunnen we deze vergelijking niet oplossen met deling door $x-a$ waarbij a een geheel getal is?

2 Bereken met ICT de oplossingen.

zie pagina 311

19 De lengte en de breedte van een balk is 10 cm. Als we de drie afmetingen van de balk vermeerderen met zijn hoogte h, dan wordt het volume 4,5-maal groter.



1. Wat is het volume V_1 van de kleine balk in functie van de hoogte h?
2. Wat is het volume V_2 van de grote balk in functie van de hoogte h?
3. Stel met het verband tussen de twee volumen een vergelijking in h op.
4. Bereken de oorspronkelijke hoogte h van de balk.

zie pagina 311

20 Voor welke waarden van p heeft de functie $f(x) = x^3 + 4px$ drie nulwaarden?

(A) $p < -1$ (B) $p < 0$ (C) $p < 1$

(D) $p \leqslant -1$ (E) $p \leqslant 0$ (F) $p \leqslant 1$

zie pagina 312

21 Voor welke waarde van p heeft de functie $f(x) = x^3 + px^2 + 9x$ slechts één nulwaarde?

zie pagina 312

22 De grafiek van de functie $f(x) = -0{,}25x^4 + 2x^2 - 4$ benadert de vorm van een kabel die opgehangen is tussen drie katrollen.

1. Teken met ICT de grafiek.
2. Wat is de afstand tussen de twee bovenste katrollen als de eenheid op de assen 10 cm is?

zie pagina 313

2.2 Extreme waarden en tekenverandering

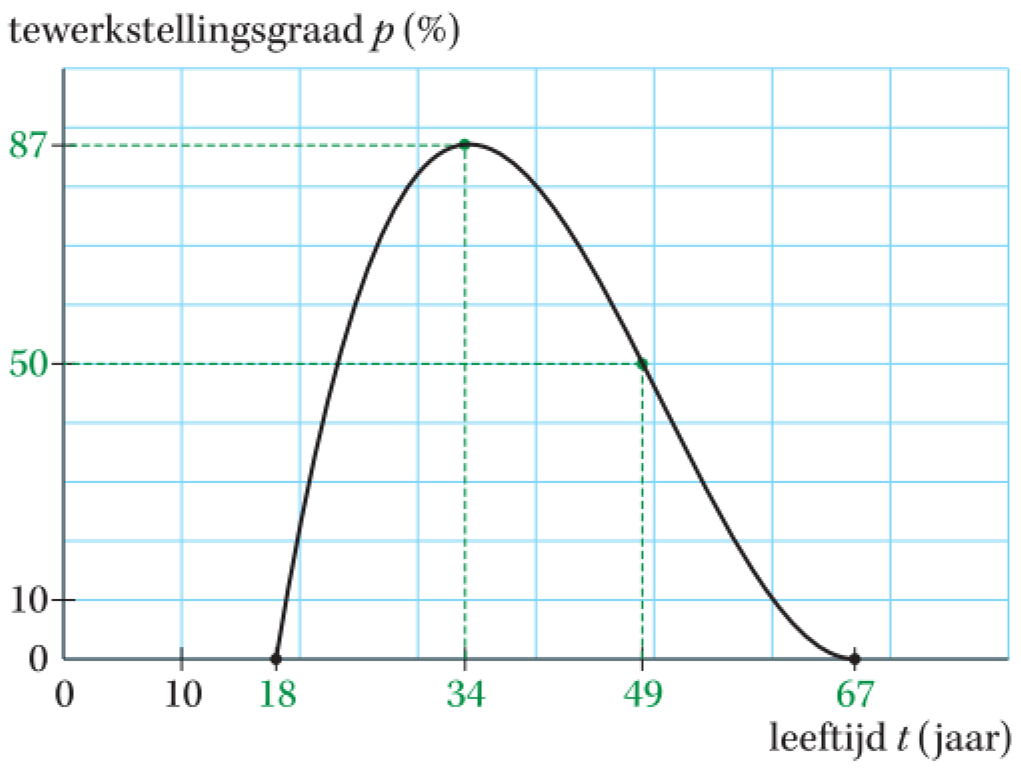
▶ Verloopschema's van veeltermfuncties

1 Instap

In België geldt leerplicht tot 18 jaar. Na onze studies komen we op de arbeidsmarkt terecht. Het percentage mensen van de niet-schoolplichtige bevolking dat tewerkgesteld is, noemen we de tewerkstellingsgraad. Statistici hebben een grafiek met bijbehorende formule gevonden voor de tewerkstellingsgraad in functie van de leeftijd.

$p = 0{,}005(l - 18)(l - 67)^2$

p : tewerkstellingsgraad in %
l : leeftijd in jaar



Beantwoord de vragen met behulp van de grafiek.

1 Wat is het werkdomein van deze functie? ....

2 Vanaf welke leeftijd daalt de tewerkstellingsgraad onder de 50 %? ....

3 Voor welke leeftijd is de tewerkstellingsgraad maximaal? ....

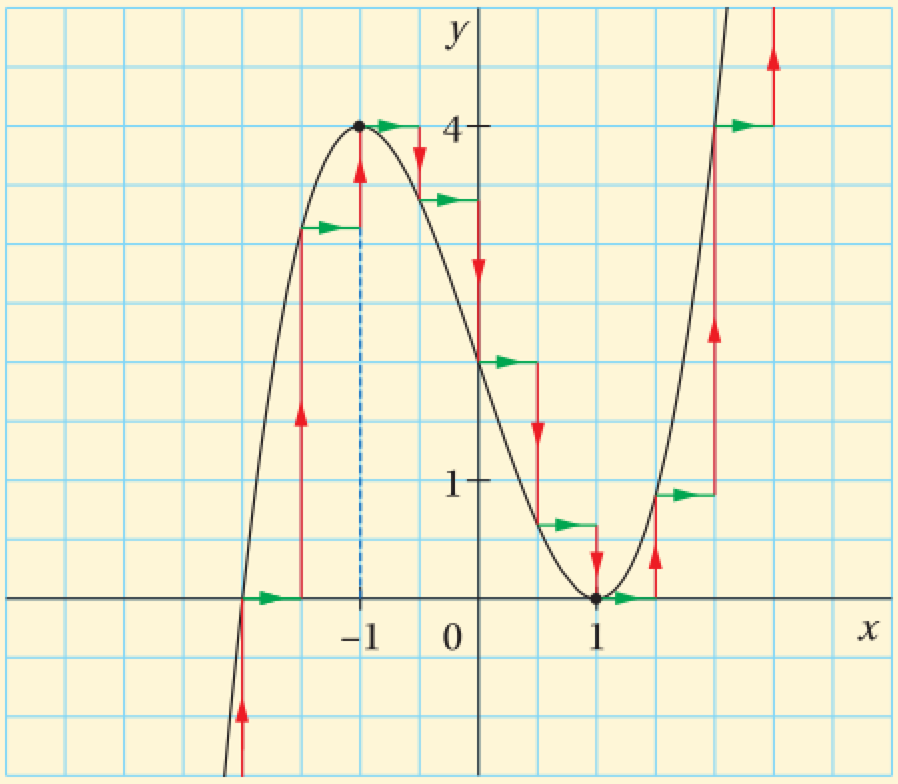
En minimaal? ....

4 Het stijgen en dalen van de tewerkstellingsgraad is in de tabel aangeduid met pijltjes. Vul de tabel aan met de leeftijd waarbij de tewerkstellingsgraad maximaal is en met het bijbehorende percentage.

leeftijd l (jaar)	18		....		67
tewerkstellingsgraad p (%)	0	↗	....	↘	0

Verloopschema van een veeltermfunctie opstellen

Om het **verloop** of het stijgen en dalen van de functie $f(x) = x^3 - 3x + 2$ te onderzoeken, tekenen we de grafiek en bepalen we de coördinaten van de toppen.



Toppen: $(-1\,,4)$ **hoogste punt** $(1\,,0)$ **laagste punt**

Als we de grafiek van links naar rechts doorlopen, zal bij een toename van het origineel x

- de functiewaarde $f(x)$ toenemen voor originelen kleiner dan -1;
- de functiewaarde $f(x)$ afnemen voor originelen tussen -1 en 1;
- de functiewaarde $f(x)$ toenemen voor originelen groter dan 1.

We zeggen:

- de functie f is **stijgend** als $x < -1$ of $x > 1$;
- de functie f is **dalend** als $-1 < x < 1$.

Voor $x = -1$ gaat de functie over van stijgend naar dalend en bereikt een maximale functiewaarde.
De functiewaarde 4 noemen we een **maximum** van de functie.

Voor $x = 1$ gaat de functie over van dalend naar stijgend en bereikt een minimale functiewaarde.
De functiewaarde 0 noemen we een **minimum** van de functie.

Een maximum of een minimum van een functie noemen we ook een **extremum** of **uiterste waarde** van de functie.

Schematisch stellen we het verloop van de veeltermfunctie $f(x) = x^3 - 3x + 2$ voor met een **verloopschema**.

x		-1		1	
$f(x)$	$\nearrow$	4 maximum	$\searrow$	0 minimum	$\nearrow$

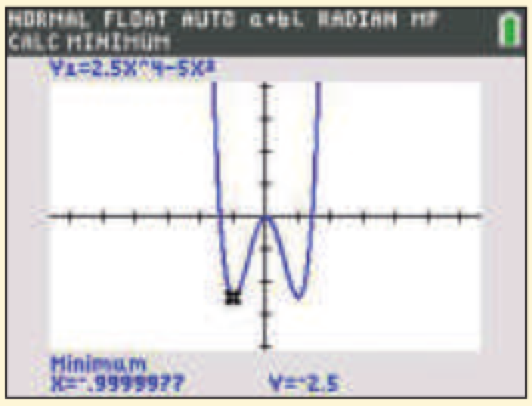
Merk op

Het maximum 4 is niet de grootste functiewaarde, zo is $f(3) = 20$ groter dan 4. Ook het minimum 0 is niet de kleinste functiewaarde omdat bijvoorbeeld $f(-3) = -16$ kleiner is dan 0. We spreken daarom soms over een **relatief maximum** of een **relatief minimum**.

Voorbeeld

We stellen het verloopschema op van de vierdegraadsfunctie $f(x) = 2{,}5x^4 - 5x^2$.

Grafiek



Toppen: $(-1\,;-2{,}5)$ $(0\,,0)$ $(1\,;-2{,}5)$

Verloopschema

x		-1		0		1	
$f(x)$	↘	$-2{,}5$ minimum	↗	0 maximum	↘	$-2{,}5$ minimum	↗

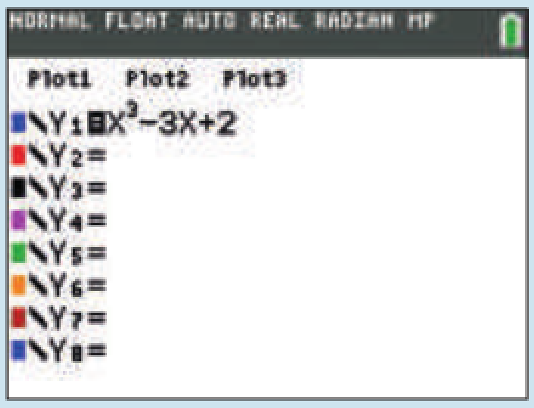
Extreme waarden van een functie bepalen

We bepalen de extreme waarden van de derdegraadsfunctie $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

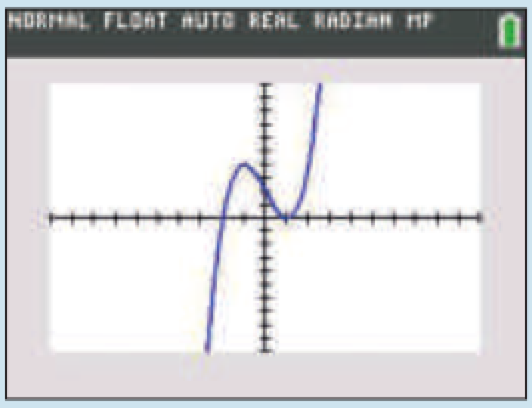
TEXAS INSTRUMENTS

We tekenen de grafiek in het standaardkijkvenster.

- [Y=] $x^3 - 3x + 2$ [ZOOM] [6: ZStandard]

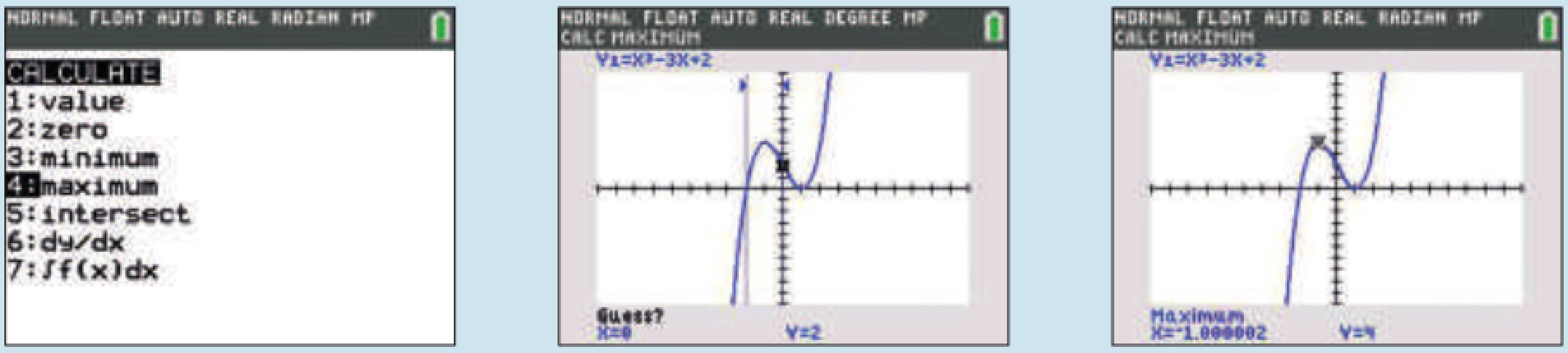






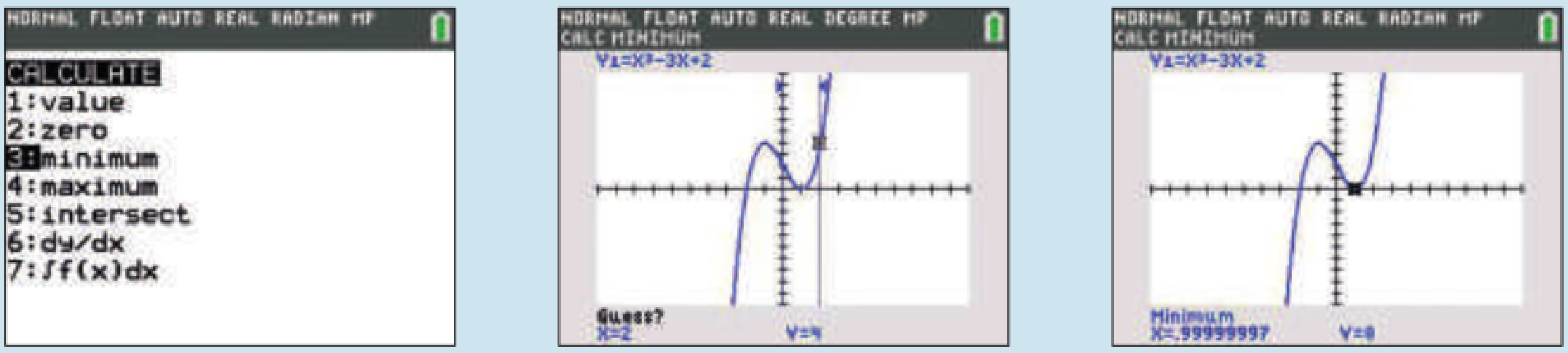
De x-coördinaat van het hoogste punt (maximum) ligt tussen de grenzen –2 en 0.

- [2ND] [CALC] [4: maximum] –2 [ENTER] 0 [ENTER] [ENTER]



De x-coördinaat van het laagste punt (minimum) ligt tussen de grenzen 0 en 2.

- [2ND] [CALC] [3: minimum] 0 [ENTER] 2 [ENTER] [ENTER]

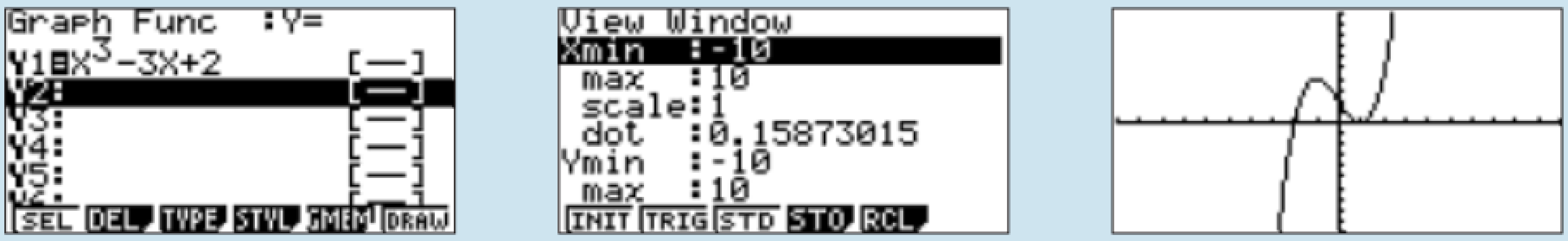


In een grafiekvenster worden de coördinaten van de toppen meestal bij benadering weergegeven. We lezen het hoogste punt (–1, 4) en het laagste punt (1, 0) af.

CASIO

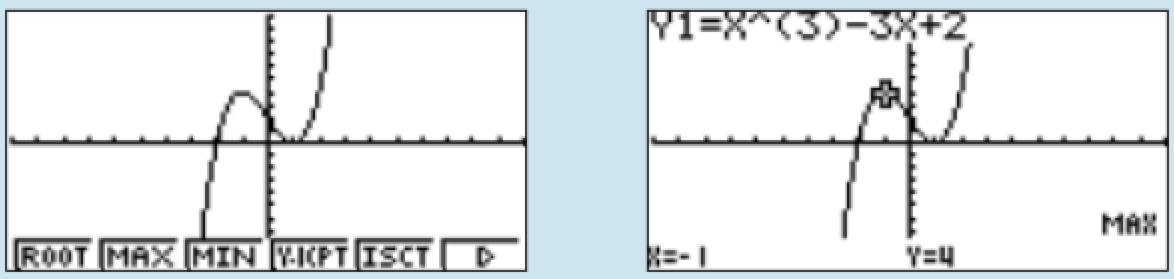
We tekenen de grafiek in het standaardkijkvenster.

- [MENU] [3: GRAPH] $x^3 - 3x + 2$ [EXE] [SHIFT] [V-Window] [F3: STD] [EXE] [F6: DRAW]



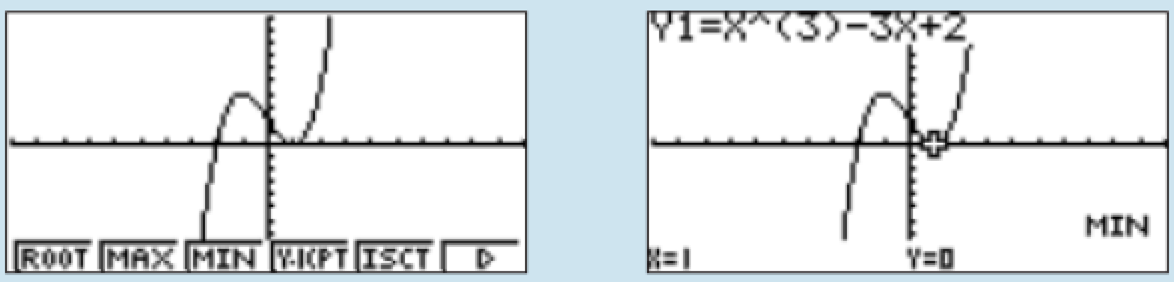
We bepalen de coördinaten van het hoogste punt (maximum).

- [SHIFT] [G-Solv] [F2: MAX]



We bepalen de coördinaten van het laagste punt (minimum).

- [SHIFT] [G-Solv] [F3: MIN]

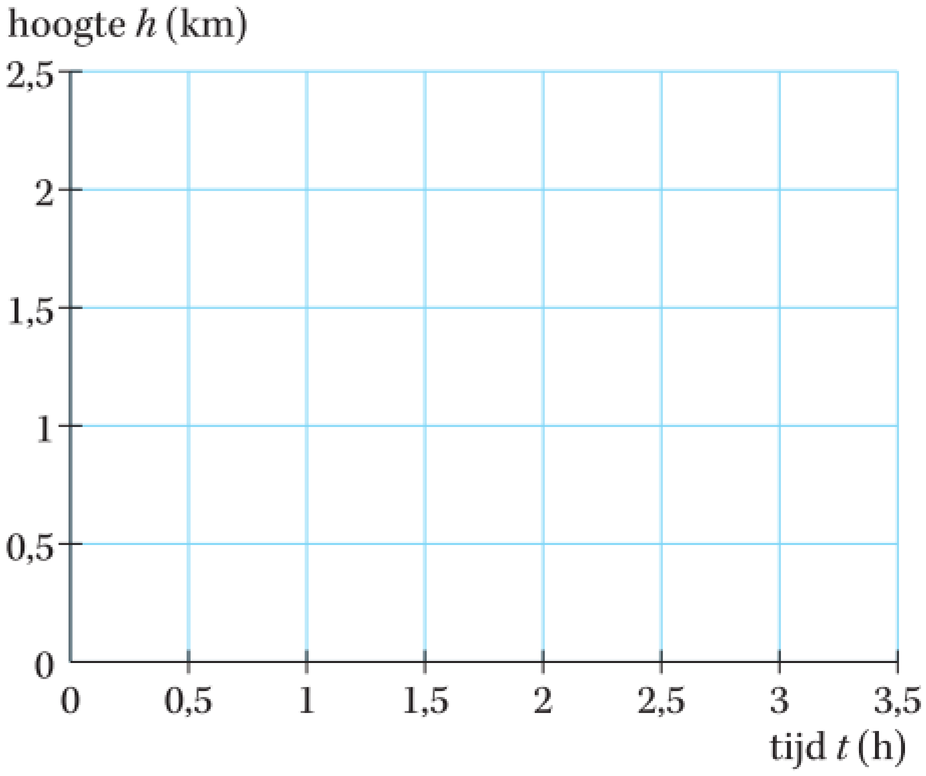


We lezen het hoogste punt (–1, 4) en het laagste punt (1, 0) af.

2

Passagiers van een luchtballon kunnen de hoogte ervan meten met een hoogtemeter. Met de meetresultaten van een drie uur durende vlucht werd de formule $h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ opgesteld. Hierin stelt h de hoogte van de ballon voor uitgedrukt in kilometer en t de tijd in uren.

1 Teken de grafiek.





2 Op welke hoogte is de ballon na een half uur?

....

3 Wanneer is de ballon op 1 kilometer hoogte?

....

....

....

....

4 Stel het stijgen en dalen van de ballon schematisch voor.

tijd t (s)	0		....		3
hoogte h (km)	0	....	....	....	0

....

5 Wanneer begint de ballon te dalen? ....

6 Welke hoogte heeft de ballon op dat ogenblik?

....

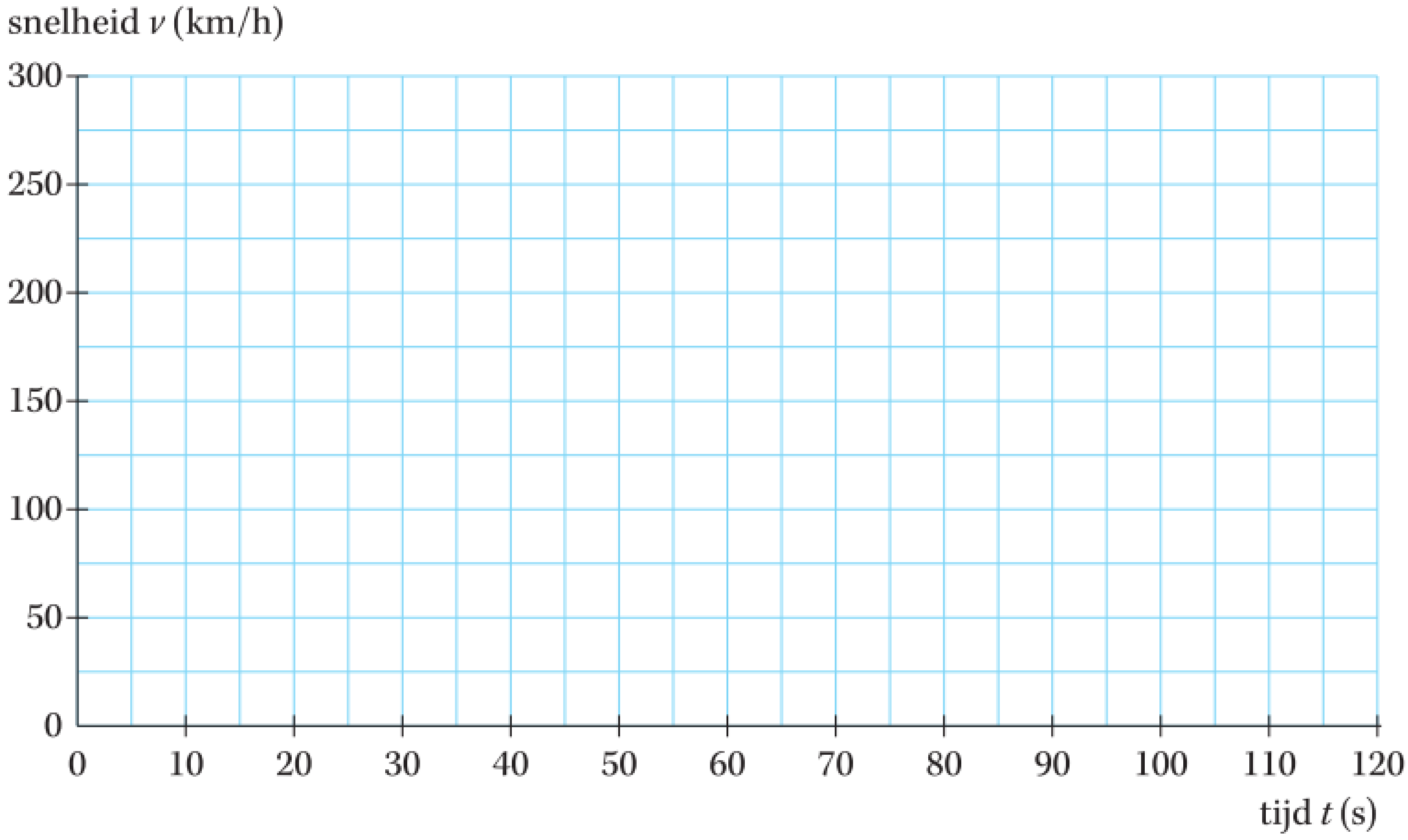
7 In welk tijdsinterval stijgt de ballon? ....

3

Een Formule 1-piloot maakt een oefenrit op een rechte baan. Hij vertrekt vanuit stilstand. De snelheid van de wagen voldoet aan de formule:

$v = -0{,}00003t^4 + 0{,}006t^3 - 0{,}48t^2 + 18t$ v : snelheid in km/h
t : tijd in s

1 Teken de grafiek.



2 Hoelang duurt de oefenrit? ....

3 Stel het stijgen en het dalen van de snelheid schematisch voor.

tijd t (s)	0		....		100
snelheid v (km/h)	0	....	....	....	0

....

4 Wanneer is de snelheid van de racewagen maximaal? ....

5 Wat is de maximale snelheid? ....

6 In welk tijdsinterval daalt de snelheid? ....



4

Stel het verloopschema op.

1 $f(x) = 2x^3 + 6x^2$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

2 $f(x) = 3x^3 - x + 7$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

3 $f(x) = -2x^3 - 3x^2$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

4 $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

5 $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

6 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

Toppen: ....

Verloopschema

x	
$f(x)$	

5

Hoe sneller een wasmachine centrifugeert, hoe droger de was uit de wasmachine komt. Een volautomatische wasmachine doet een laatste zwierbeurt van 6 minuten. De draaisnelheid wordt beschreven met de formule:

$n = -30t^3 + 150t^2 + 180t$ — n : draaisnelheid in aantal toeren per minuut; t : tijd in minuten

1 Stel het stijgen en dalen van de draaisnelheid schematisch voor.

tijd t (min)	0		....		6
draaisnelheid n (toeren/min)	0	....	....	....	0

2 Wanneer is het toerental maximaal?

....

....

....

3 Wat is de maximale draaisnelheid?

....

6

In de supermarkt is het soms lang wachten aan de kassa. De gemiddelde wachttijd is sterk afhankelijk van het tijdstip waarop we de winkel bezoeken en wordt gegeven door de formule:

$$w(t) = \frac{41}{1200}t^3 - \frac{19}{40}t^2 + \frac{157}{120}t + \frac{5}{2}$$

w : gemiddelde wachttijd in minuten
t : aantal uren na 9 uur

1 Als we weten dat de winkel om 19 uur sluit, bepaal dan het werkdomein van deze functie.

....

2 Hoeveel bedraagt de gemiddelde wachttijd bij openingstijd? En bij sluitingstijd?

....

....

3 Stel het stijgen en dalen van de gemiddelde wachttijd schematisch voor.

aantal uren t	
gem. wachttijd w (min)	

4 Hoeveel minuten moeten we maximaal aan de kassa wachten?

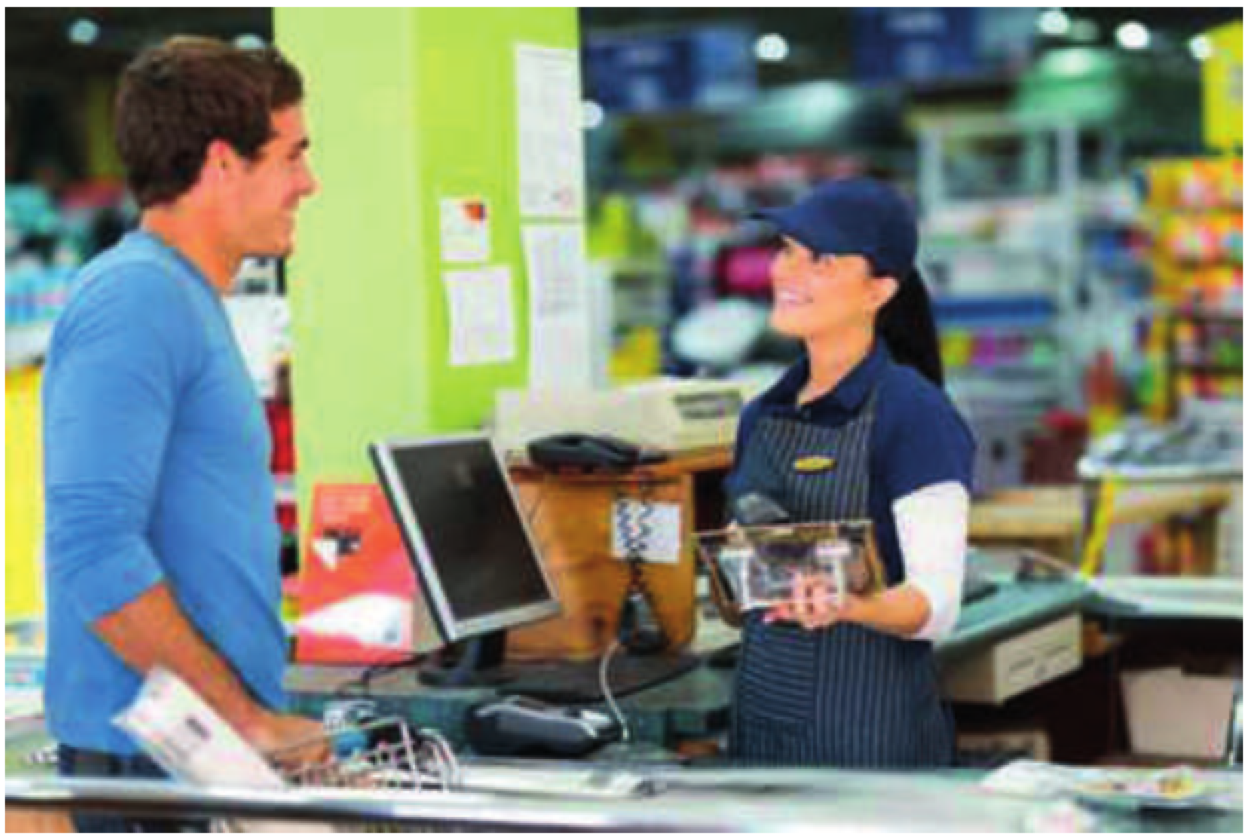
....

5 Wat is het ideale moment om ons naar de kassa te begeven?

....

....

....



7

Het pijnstillend effect van het geneesmiddel Delta-Med kunnen we beschrijven met de formule $w(t) = -\frac{25}{9}t^3 + \frac{50}{3}t^2$. Hierin stelt w de tijdelijke werking van een tablet voor uitgedrukt in procenten en t de tijd in uren.

1 Hoelang duurt de werking van een tablet Delta-Med?

....

....

....

....

....

....

2 Wanneer is de werking maximaal?

....

....

3 Hoeveel procent bedraagt de maximale werking van het tablet?

....

4 Op welke tijdstippen werkt Delta-Med voor 75 %?

....

....

....



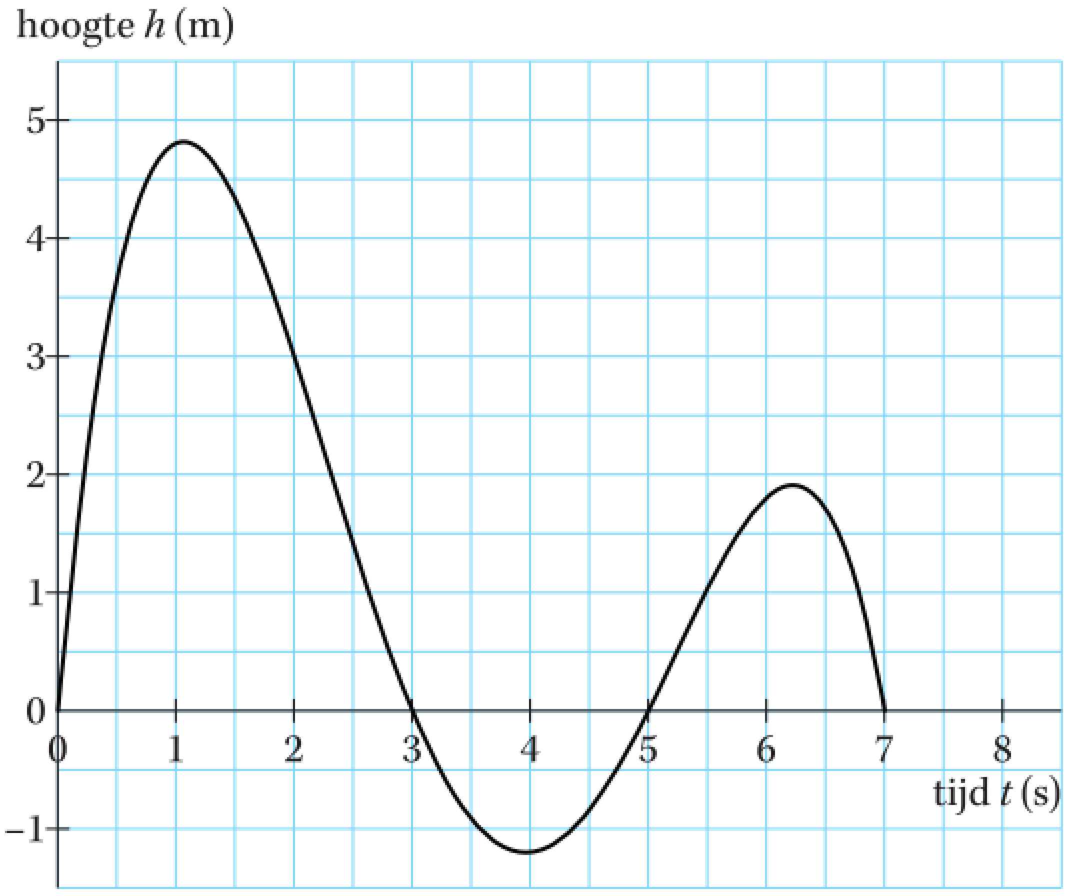
▶ Tekentabellen en ongelijkheden

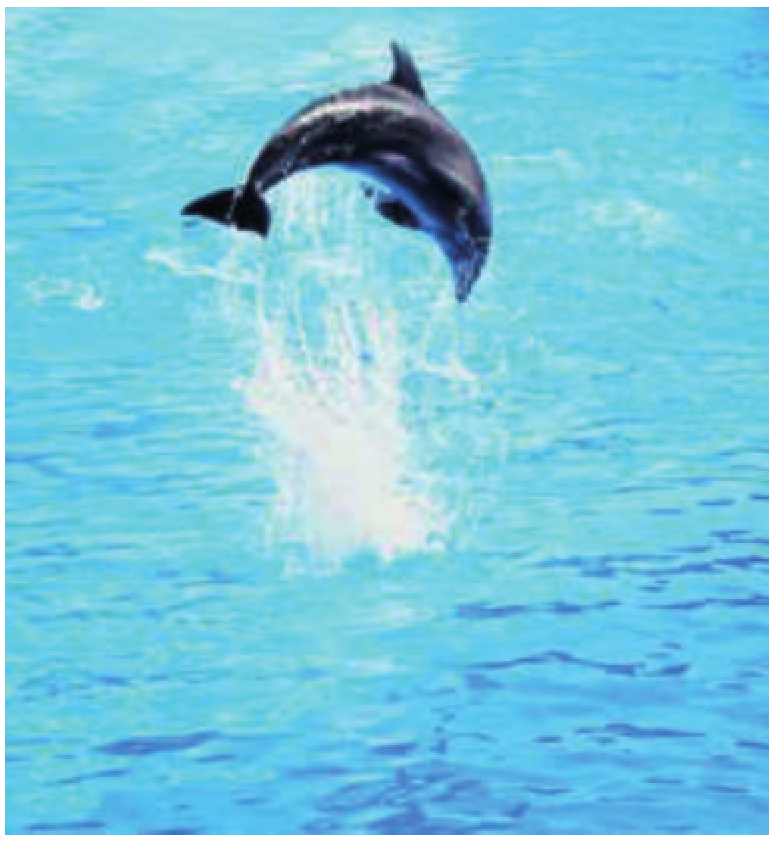
8 Instap

De tweevoudige sprong van een dolfijn wordt met speciale apparatuur gefilmd zodat de hoogte van de dolfijn op elk tijdstip kan worden bepaald. De hoogte van de sprong kunnen we beschrijven met de formule:

$h = -0{,}1t^4 + 1{,}5t^3 - 7{,}1t^2 + 10{,}5t$

h : hoogte boven het waterniveau in meter
t : tijd in seconden





1 Hoelang duurt de tweevoudige sprong?

....

2 Na hoeveel seconden duikt de dolfijn voor de eerste maal in het water?

....

3 Hoelang blijft de dolfijn boven water?

....

4 De periode waarin de dolfijn zich boven of onder het wateroppervlak bevindt, kunnen we schematisch weergeven met een tekentabel. Vul de tabel aan met de ontbrekende nulwaarden en duid de positieve en negatieve hoogten aan.

tijd t (s)	0		....		....		7
hoogte h (m)	0	....	....	....	....	....	0

5 In welk tijdsinterval blijft de dolfijn onder water?

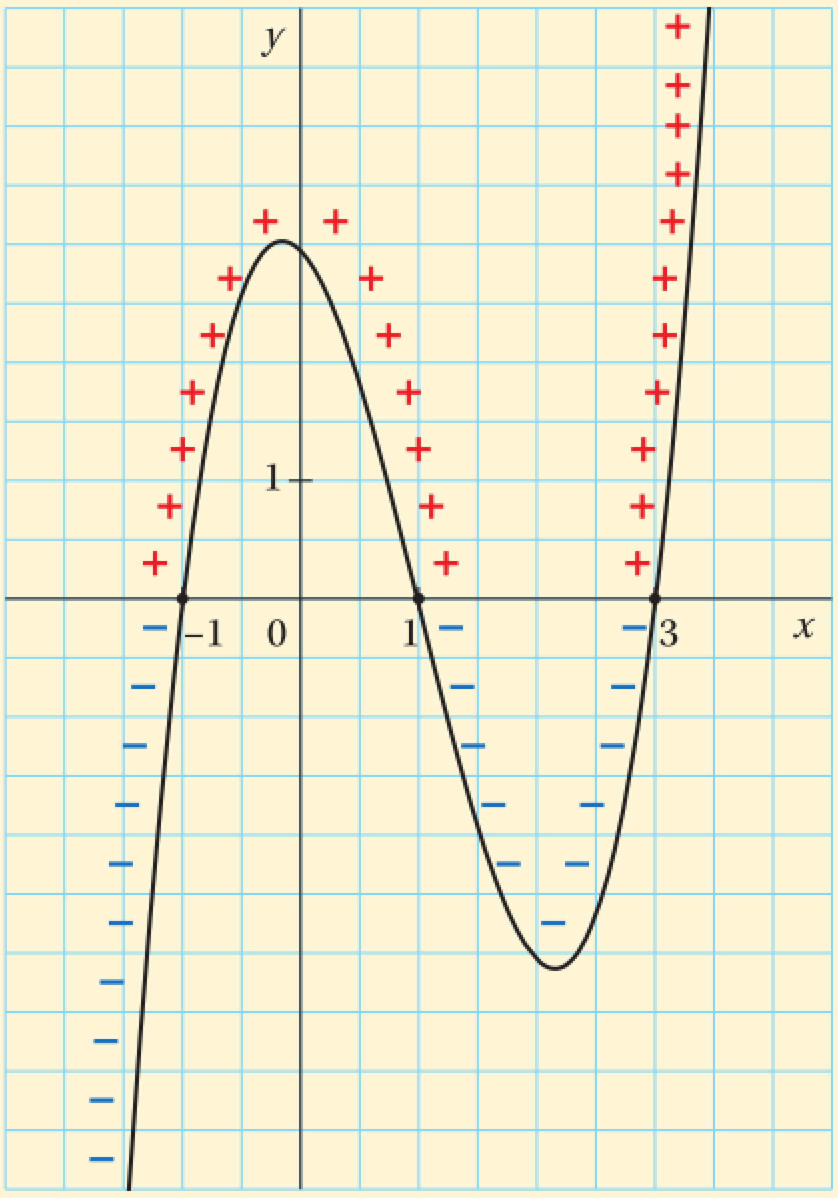
....

Tekentabel van een veeltermfunctie opstellen

Als we het **teken** van een veeltermfunctie onderzoeken, gaan we na voor welke originelen de functiewaarden positief, negatief of nul zijn.

Grafische methode

Om het teken van $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ te onderzoeken, tekenen we de grafiek en bepalen we de nulwaarden.



Nulwaarden: −1, 1 en 3

We stellen vast dat

- de grafiek boven de x-as ligt tussen de nulwaarden −1 en 1 en rechts van de nulwaarde 3;
- de grafiek onder de x-as ligt links van de nulwaarde −1 en tussen de nulwaarden 1 en 3.

We schrijven:

- $f(x) > 0$ als $-1 < x < 1$ of $x > 3$
- $f(x) < 0$ als $x < -1$ of $1 < x < 3$

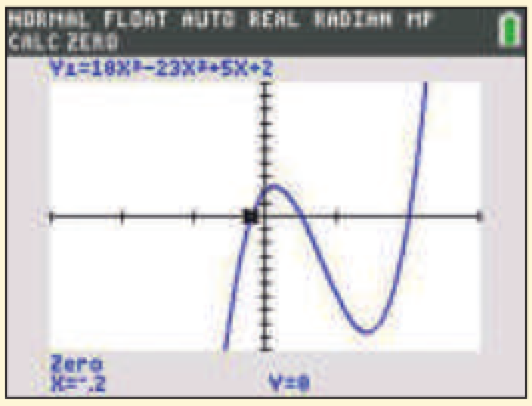
Schematisch stellen we het teken van de veeltermfunctie $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ voor met een **tekentabel**.

x		−1		1		3	
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Voorbeeld

We stellen de tekentabel op van de functie $f(x) = 10x^3 - 23x^2 + 5x + 2$.

Grafiek



Nulwaarden: –0,2 ; 0,5 en 2

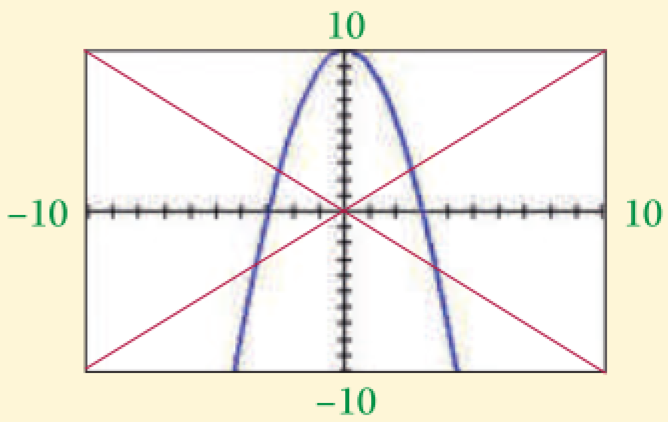
Tekentabel

x		–0,2		0,5		2	
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

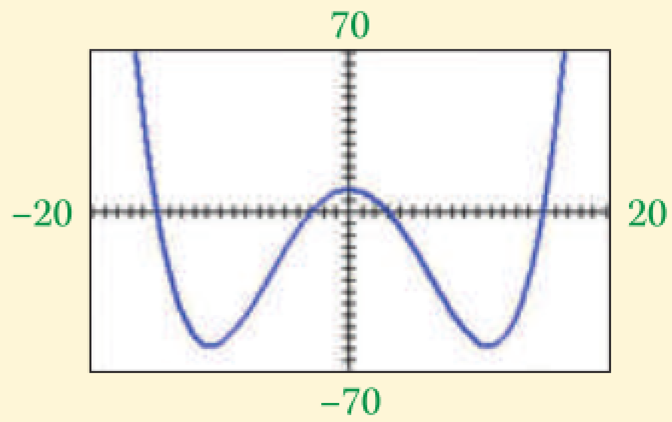
Merk op

Het nadeel van de grafische methode is dat in het standaardkijkvenster de snijpunten van de grafiek met de x-as niet allemaal zichtbaar zijn. Bijvoorbeeld: $f(x) = 0{,}005(x^2 - 225)(x^2 - 9)$.

standaardkijkvenster



aangepast kijkvenster



Algebraïsche methode

Om het teken te kennen van een veeltermfunctie met graad hoger dan twee, ontbinden we het functievoorschrift in factoren van de eerste en tweede graad. We bepalen eerst het teken van elke factor afzonderlijk en daarna het teken van het product met de tekenregel voor de vermenigvuldiging.

Voorbeeld

We stellen de tekentabel op van de functie $f(x) = 10x^3 - 23x^2 + 5x + 2$.

Ontbinden in factoren

$f(x) = (x - 2)(10x^2 - 3x - 1)$

x	1	–1	2
$f(x)$	–6	–36	0

$f(x)$ delen door $x - 2$

	10	–23	5	2
$a = 2$		20	–6	–2
	10	–3	–1	0

Nulwaarden

$f(x) = 0$

$(x-2)(10x^2 - 3x - 1) = 0$

$x - 2 = 0$ of $10x^2 - 3x - 1 = 0$ — elke factor gelijkstellen aan nul

$x = 2$ — $x = 0{,}5$ of $x = -0{,}2$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1) = 49$

$x_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \cdot 10} = 0{,}5$

$x_2 = \dfrac{3-7}{20} = -0{,}2$

Tekentabel

x		$-0{,}2$		$0{,}5$		2		
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+	teken van eerstegraadsfunctie
$10x^2 - 3x - 1$	+	0	−	0	+	+	+	teken van tweedegraadsfunctie
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+	tekenregel voor vermenigvuldiging



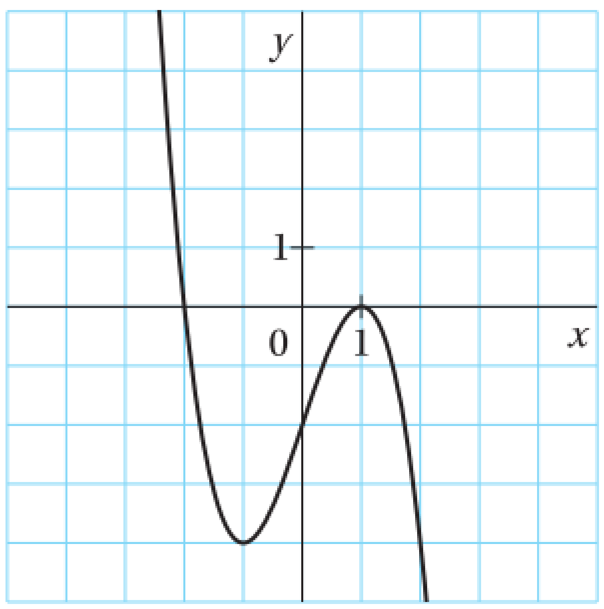
Merk op

In de tekentabel komt het uiterst rechtse teken van $f(x)$ altijd overeen met het teken van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Als het aantal nulwaarden van een veeltermfunctie gelijk is aan de graad ervan, dan wisselen de tekens + en − elkaar af.

9

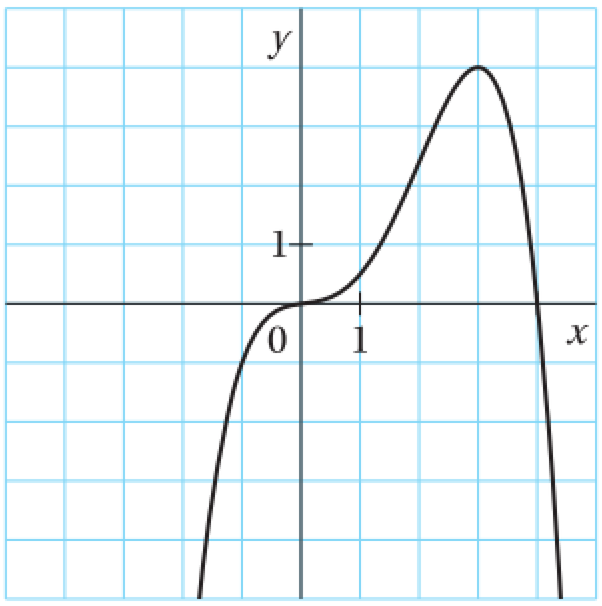
We kunnen alle nulwaarden van de veeltermfunctie op de grafiek aflezen. Stel een tekentabel op.

1



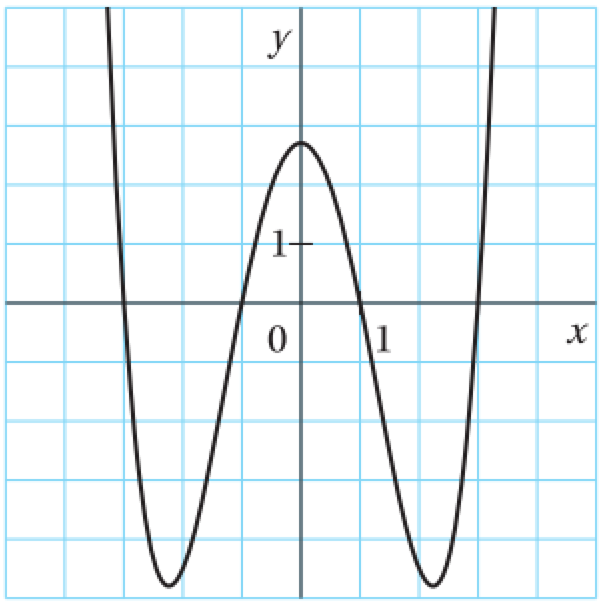
x	
$f(x)$	

2



x	
$f(x)$	

3



x	
$f(x)$	

10

We kunnen alle nulwaarden van de veeltermfunctie in de tabel aflezen. Stel een tekentabel op.

1

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−432	−120	0	18	0	−12	0	30	48	0	−192

x	
$f(x)$	

2

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	−128	−63	−24	−5	0	−3	−8	−9	0	25	72

x	
$f(x)$	

3

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	351	153	55	15	3	1	3	15	55	153	351

x	
$f(x)$	

11

Stel met de grafische methode de tekentabel op.

1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Nulwaarden: ....

Tekentabel

x	
$f(x)$	

2 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9x + 27$

Nulwaarden: ....

Tekentabel

x	
$f(x)$	

3 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

Nulwaarden: ....

Tekentabel

x	
$f(x)$	

4 $f(x) = -5x^4 + 10x^2 - 5$

Nulwaarden: ....

Tekentabel

x	
$f(x)$	

5 $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 8x$

Nulwaarden: ....

Tekentabel

x	
$f(x)$	

12

Stel met de algebraïsche methode de tekentabel op.

1 $f(x) = (x - 3)(x^2 + 5x + 6)$

Nulwaarden

Tekentabel

2 $f(x) = (5 - x)(x - 2)^2$

3 $f(x) = x^2(x-1)(x+2)$

4 $f(x) = (x-1)(2x^2-3x+2)$

13

Stel met de algebraïsche methode de tekentabel op.

1 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

Ontbinden in factoren

Nulwaarden

Tekentabel

2 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 4$

3 $f(x) = 10x^3 - 49x^2 - 8x + 15$

4 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

Hogeregraadsongelijkheden oplossen met een tekentabel

Een ongelijkheid van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d < 0$ noemen we een **derdegraadsongelijkheid** in x.

Ongelijkheden waarvan de graad hoger is dan twee, noemen we **hogeregraadsongelijkheden**.

Om een hogeregraadsongelijkheid op te lossen, herleiden we de ongelijkheid op nul en stellen een tekentabel op van de functie bepaald door het linkerlid. In de tekentabel lezen we de oplossingen van de ongelijkheid af.

Voorbeeld

We lossen de ongelijkheid $x^3 - 3x^2 - x + 3 \geqslant 0$ op.

Tekentabel van $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

x		-1		1		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

zie tekentabel pagina 119

Oplossing van $f(x) \geqslant 0$



grafische voorstelling op getallenas

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ of $x \geqslant 3$ **notatie met ongelijkheden**

$x \in [-1, 1] \cup [3, +\infty[$ **intervalnotatie**

Het symbool $\cup$ staat voor unie en voegt de intervallen $[-1, 1]$ en $[3, +\infty[$ samen tot één verzameling.

14

Los de ongelijkheid op door een tekentabel op te stellen met de grafische methode. Stel de oplossing voor met ongelijkheden.

1 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$

$f(x) =$ ……………………………………………………………………………

Nulwaarden: ……………………………………………………………………

Tekentabel

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Oplossing van $f(x) < 0$: ………………………………………………………

2 $-2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 \geqslant 0$

3 $x^3 - 4x^2 \geqslant 0$

4 $-x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 8x - 12 > 0$

5 $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 \leqslant 0$

....

....

....

....

....

....

....

15

Los de ongelijkheid op door de tekentabel op te stellen met de grafische methode. Vul de gekozen venstervariabelen in en stel de oplossing voor met intervallen.

1 $x^3 - 16x^2 + 51x - 36 \geqslant 0$

$f(x) =$ ....

$x_{min} =$ .... $x_{max} =$ .... $y_{min} =$ .... $y_{max} =$ ....

Nulwaarden: ....

Tekentabel

....

....

Oplossing van $f(x) \geqslant 0$: ....

2 $x^4 - 125x^2 + 484 < 0$

....

....

....

....

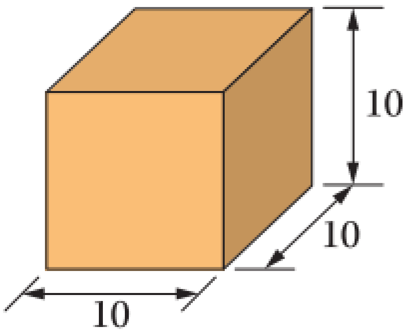
....

....

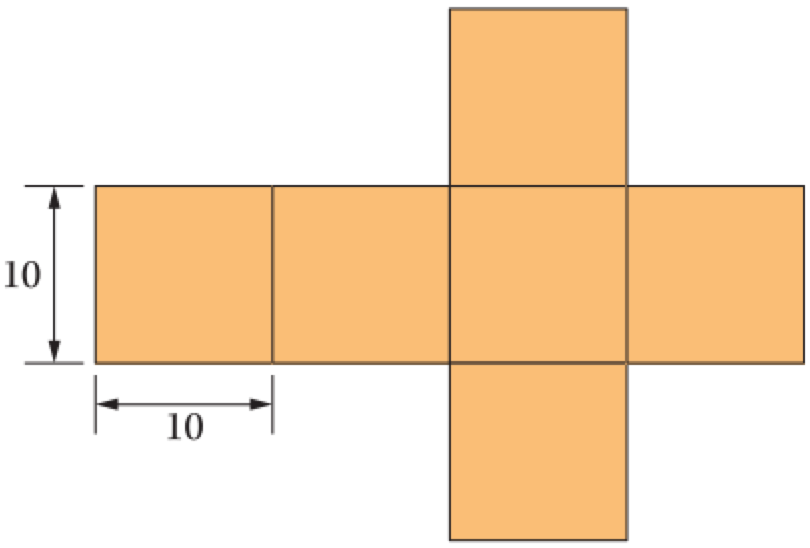
....

16

Bij een kubus met ribbe 10 cm is het maatgetal van het volume in cm^3 groter dan het maatgetal van de oppervlakte in cm^2.



$10^3 > 10^2 \cdot 6$



Welke kubussen met ribbe x hebben een volume waarvan het maatgetal kleiner is dan het maatgetal van de oppervlakte?

1 Vertaal het probleem in een ongelijkheid.

2 Herleid de ongelijkheid op nul.

3 Bereken de nulwaarden van de functie f bepaald door de veelterm van de ongelijkheid in vraag 2.

4 Stel de tekentabel op van de functie f.

5 Schrijf de oplossing van het probleem met ongelijkheden.

17

Los de ongelijkheid op door de tekentabel op te stellen met de algebraïsche methode. Stel de oplossing voor met ongelijkheden.

1 $-x(x+1)(x-2) \geqslant 0$

$f(x) =$ ....

Nulwaarden

....

....

....

....

Tekentabel

....

....

....

....

....

....

Oplossing van $f(x) \geqslant 0$: ....

2 $x^3(x-1) > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

3 $(x-2)^2(x+3)^3 \leqslant 0$

4 $x^2(x^2-1) \geqslant 0$

18

Los de ongelijkheid op door de tekentabel op te stellen met de algebraïsche methode. Stel de oplossing voor met ongelijkheden.

1 $12x^3 + 2x^2 - 4x \geqslant 0$

$f(x) =$ ....

Ontbinden in factoren

Nulwaarden

Tekentabel

Oplossing van $f(x) \geqslant 0$:

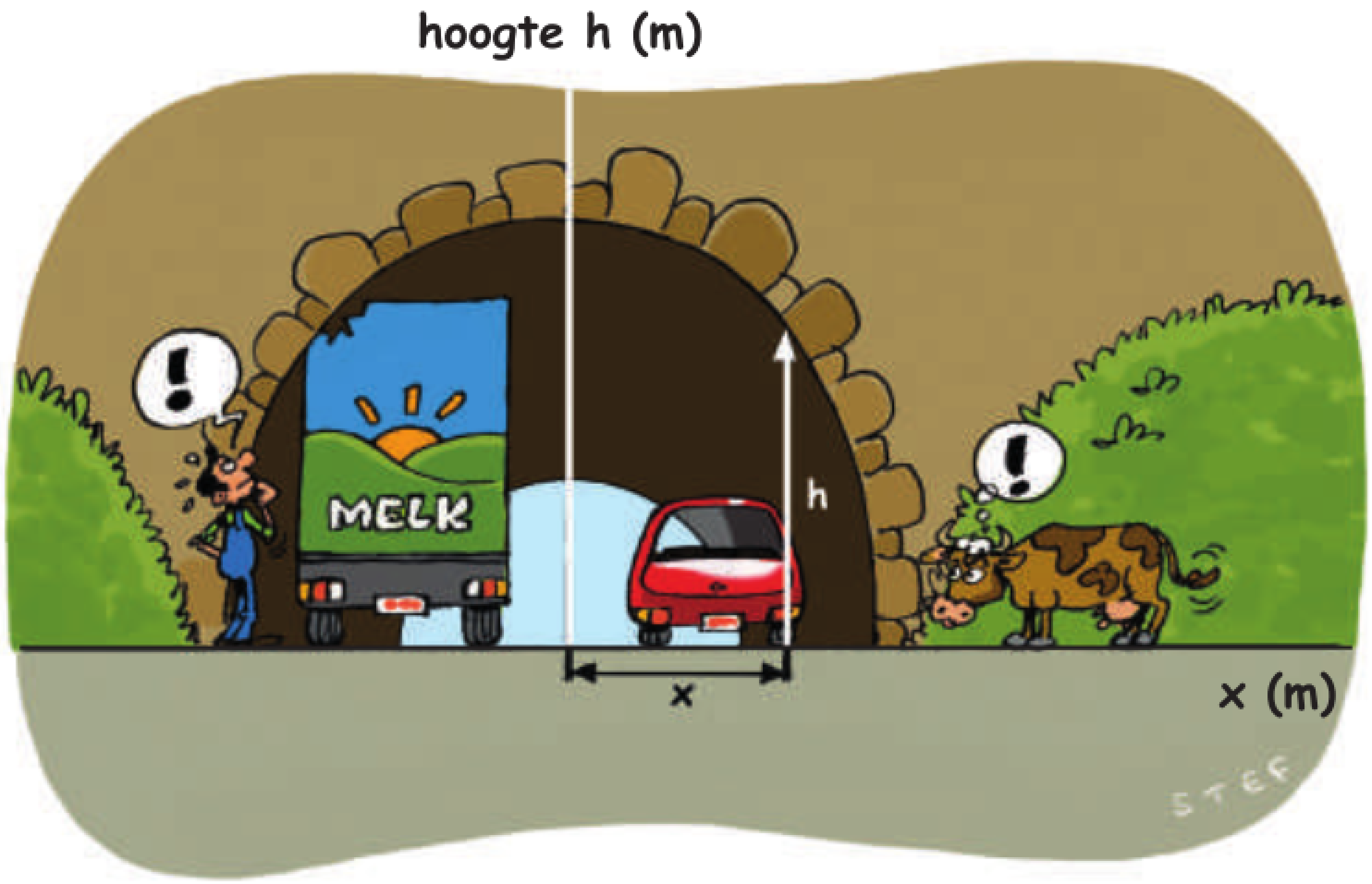
2 $4x^3 - 3x - 1 \leqslant 0$

3 $3x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 12x < 0$

4 $4x^4 - 35x^2 - 9 \geqslant 0$

19

Het dwarsprofiel van een tunnel met twee rijstroken kunnen we met de formule $h(x) = -0{,}005x^4 + 0{,}01x^2 + 8$ beschrijven. Hierin stelt h de hoogte van de tunnel in meter voor, gemeten op een afstand x van het midden van de weg.



1 Wat is de maximale hoogte van de tunnel?

....

2 Wat is de breedte van de tunnel?

....

....

....

....

....

3 Bepaal de maximale breedte van de weg als de tunnelhoogte boven elke rijstrook groter is dan 4,5 meter.

- Stel een ongelijkheid op. ....
- Herleid op nul. ....
- Los de ongelijkheid op door een tekentabel op te stellen met de grafische methode.

....

....

....

- Bepaal de maximale breedte van de weg.

Uitdagingen

1 Stel het verloopschema op.

1 $f(x) = 4x(10 - x)(6 - x)$

2 $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 35$

3 $f(x) = 25x^4 - 800\,000x + 12\,345$

4 $f(x) = 100x^2 - 10x^3$

zie pagina 314

2 Je hebt een goed geheugen nodig om een vreemde taal te leren. Een experiment op studenten die een cursus Japans volgen, leert ons dat woorden uit het hoofd leren sterk afhankelijk is van de studietijd. De doorsnee-student voldoet aan de formule:

$w(t) = -\dfrac{1}{300}t^2 + \dfrac{1}{5}t$ $\quad w$: aantal woorden per minuut $\quad t$: studietijd in minuten

1 Wanneer is het verzadigingsmoment voor deze doorsnee-student bereikt?

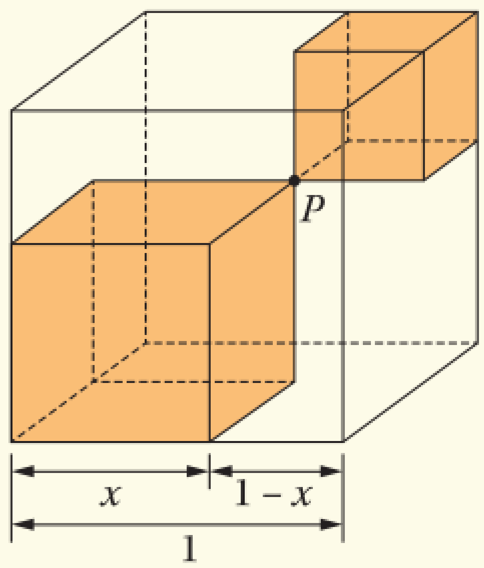
2 Stel het stijgen en dalen van w schematisch voor.

3 Wanneer memoriseert hij de meeste woorden per minuut?

4 Hoeveel woorden zijn dat?

zie pagina 315

3 Bepaal de plaats van het punt P zodat de som van de volumes van de ingekleurde kubussen minimaal is.



zie pagina 315

4 Stel met de algebraïsche methode de tekentabel op.

1 $f(x) = x(x + 2)^2$

2 $f(x) = \left(-x + \dfrac{1}{2}\right)(3x - 4)(x - 2)^3$

3 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 11x - 6$

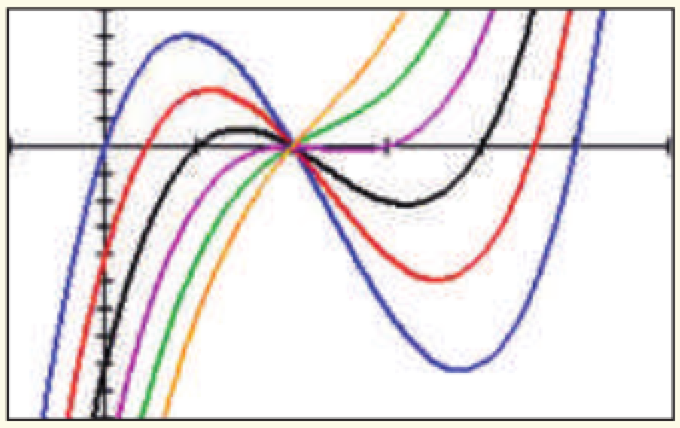
4 $f(x) = x^4 - 12x^2 + 35$

5 $f(x) = x^3 - 8$

6 $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{1}{12}x^2$

zie pagina 316

5 Op de schermafdruk zien we enkele grafieken van de functie $f(x) = (x-2)(x^2 - 5x + p)$ voor verschillende waarden van de variabele p. Voor welke waarden van p heeft de functie slechts één tekenverandering in het tekenverloop?



zie pagina 320

6 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?
Los op met ICT en stel de oplossing voor op een getallenas.

1. $f(x) = -x^2 + 11$ en $g(x) = 2$
2. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ en $g(x) = x + 3$
3. $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^3 + 4$
4. $f(x) = 100x^2 - 10x^3$ en $g(x) = 1000$

zie pagina 320

7 Los de ongelijkheid op met ICT. Bedenk dat beide leden van de ongelijkheid een functie bepalen (zie ook uitdaging 6). Stel de oplossing voor met intervallen.

1. $3x^4 \geqslant 2x^2 + 1$
2. $6x^2 - 32 < x^3$
3. $4x^2 + 20x > x^4 + 5x^3$
4. $x^4 - 1 \leqslant 3x^3 - 3x$

zie pagina 321

8 Een Belgisch bedrijf dat gespecialiseerd is in de productie van ledverlichting, ontdekt na zorgvuldig onderzoek dat er een merkwaardig verband bestaat tussen de verkoopprijs p van een bepaald type lamp en de winst w die de firma jaarlijks maakt.

$w(p) = -0{,}0007p^4 + 0{,}043p^3 - 0{,}8047p^2 + 5{,}526p - 15$

w : winst in miljoen euro
p : prijs van een ledlamp in euro

1. Wat is de jaarlijkse winst als de prijs van de ledlamp 25 euro bedraagt?
2. Voor welke prijs is de winst maximaal?
3. Hoeveel bedraagt de maximale winst?
4. Het bedrijf stelt dat de jaarlijkse winst minimaal 10 miljoen euro moet bedragen. Schrijf met een ongelijkheid alle mogelijke prijzen van een ledlamp.
5. Hoe groot is de winst of het verlies als het bedrijf, bij wijze van reclamestunt, twee lampen voor de prijs van één zou verkopen?

zie pagina 322

9 Nadat er een ringweg verder doorgetrokken was, kwamen er heel wat klachten over geluidshinder van de omwonenden. De statistische dienst van het Vlaams departement van Openbare Werken voerde daarom metingen uit naar de verkeersdrukte. Uit de metingen blijkt dat het debiet van het verkeer over een viaduct op deze weg te omschrijven is met de formule $w = -0{,}02t^3 + 0{,}32t^2 + 3{,}84t + 5$. Hierin stelt w het aantal wagens per minuut voor en t de uuraanduiding.

1 Wat is de verkeersdrukte om 24 uur?

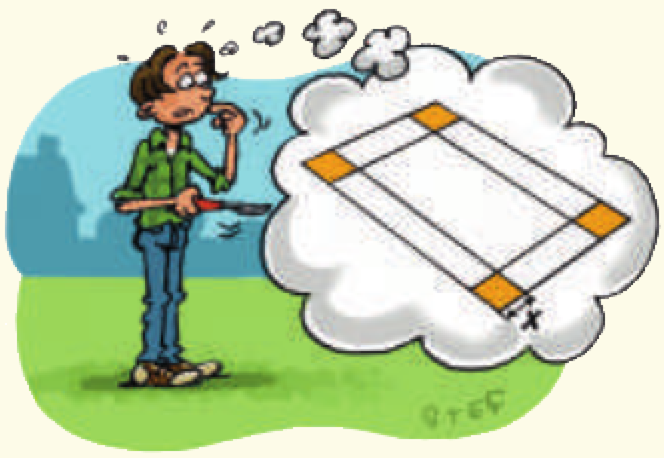
2 Wanneer doet zich een verkeerspiek voor?

Hoeveel wagens per minuut tellen we dan?

3 Wanneer heeft het viaduct een debiet van meer dan 50 wagens per minuut?

zie pagina 323

10 Cas wil een plantenbak plooien uit een zinken plaat van 70 × 100 cm. Daarvoor knipt hij op de vier hoeken van de plaat een vierkant met zijde x weg, plooit de vrijgekomen zijwanden naar boven en soldeert de naden dicht.







1 Stel een formule op voor de inhoud van de plantenbak in functie van de zijde x.

2 Voor welke x kan de bak minimum 40 liter potaarde bevatten? Welke ongelijkheid moeten we oplossen zodat x uitgedrukt is in cm? Los op met ICT.

3 Voor welke waarde van x heeft de plantenbak de grootste inhoud?

4 Wat zijn de afmetingen van de bloembak met de grootste inhoud?

5 Hoeveel liter teelaarde kan deze bloembak bevatten?

zie pagina 324

3

Veranderingen van veeltermfuncties

De snelheid van een wagen verandert voortdurend tijdens het rijden. Wanneer een auto op een file inrijdt, gebeurt deze snelheidsverandering bruusk.

Simulaties van ongevallen met testwagens hebben tot nieuwe inzichten en ontwikkelingen geleid.

- Auto's kregen kreukelzones.
- Het dragen van de veiligheidsgordel werd verplicht.
- De airbag werd geïntroduceerd.
- Om het blokkeren van de wielen te voorkomen tijdens een noodstop, werden auto's uitgerust met een antiblokkeersysteem (ABS).
- Het adaptieve cruise control (ACC) houdt de snelheid van de auto constant en neemt zelfs gas terug wanneer we de voorganger te dicht naderen.

In dit hoofdstuk zullen we veranderingen voorstellen op een grafiek en berekenen met een formule. Ook zullen we het onderscheid leren kennen tussen de gemiddelde verandering over een periode en de ogenblikkelijke verandering op een bepaald moment.

3.1 Gemiddelde verandering

3.2 Ogenblikkelijke verandering



3.1 Gemiddelde verandering

▶ Veranderingen en toenamediagram

1 Instap

Beleggen op de beurs is niet zonder risico. De jaargrafiek toont hoe de beurswaarden van een Europees aandeel veranderen. Analisten proberen aan de hand van de grafiek het koersverloop van het aandeel te voorspellen.



1 Met hoeveel euro steeg het aandeel gedurende een volledig jaar?

....

2 Thomas kocht aandelen begin maart. Met hoeveel euro zijn de aandelen in waarde gedaald twee maanden na de aankoop?

....

3 Begin november verkocht Thomas zijn aandelen. Hoeveel bedroeg de winst of het verlies per aandeel?

....

4 Tijdens het laatste kwartaal van het jaar maakte het aandeel een herstelbeweging. Wat is de waardeverandering over deze periode?

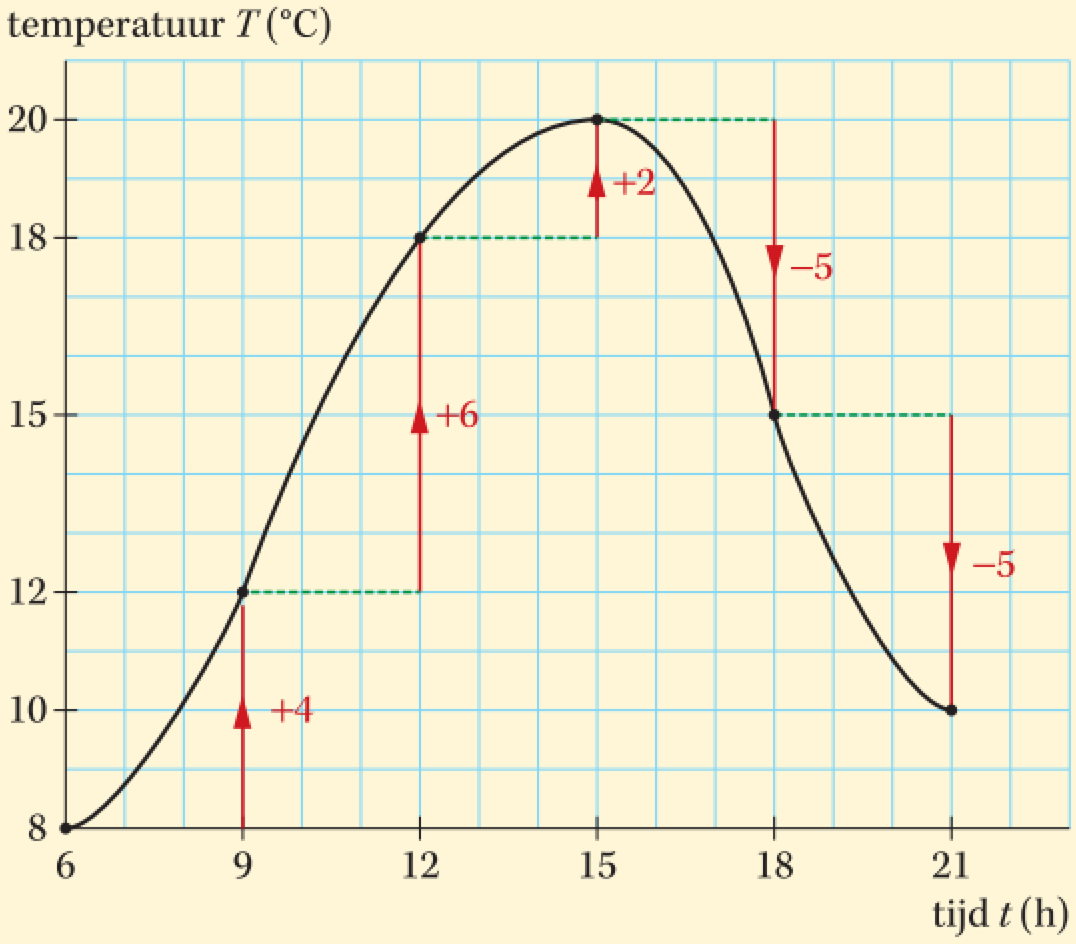
....

Veranderingen en toenamediagram

De koers van een aandeel op de beurs verandert voortdurend. Andere voorbeelden van grootheden die gedurende een periode kunnen veranderen, zijn: temperatuur, luchtdruk, snelheid, bevolkingscijfers, productiekosten, enz.

De tabel en grafiek laten zien hoe de temperatuur op een dag in juni verandert tussen 6 uur 's morgens en 9 uur 's avonds.

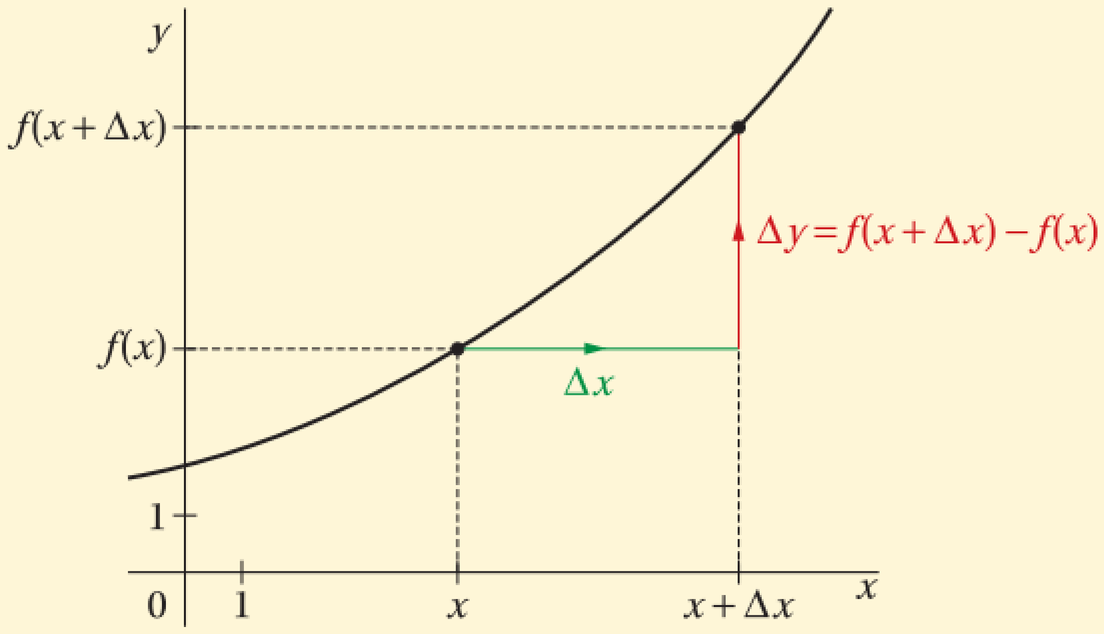
tijd t (h)	6	9	12	15	18	21
temperatuur T (°C)	8	12	18	20	15	10
verandering ΔT (°C)		+4	+6	+2	−5	−5



De verandering van de temperatuur tussen 15 uur en 18 uur is −5 °C.

Veranderingen en differenties

De **verandering** van de functiewaarde $f(x)$ over het interval $[x, x + \Delta x]$ is het verschil $f(x + \Delta x) - f(x)$.



De verschillen aangeduid op de grafiek, noemen we **differenties** en noteren we met de Griekse letter delta (Δ).

De **differentie Δx** is de lengte of de stapgrootte van het interval $[x, x + \Delta x]$ waarover de verandering gebeurt.

De **differentie Δy** is de verandering van de functiewaarde over het interval $[x, x + \Delta x]$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Een differentie kan zowel positief als negatief zijn.

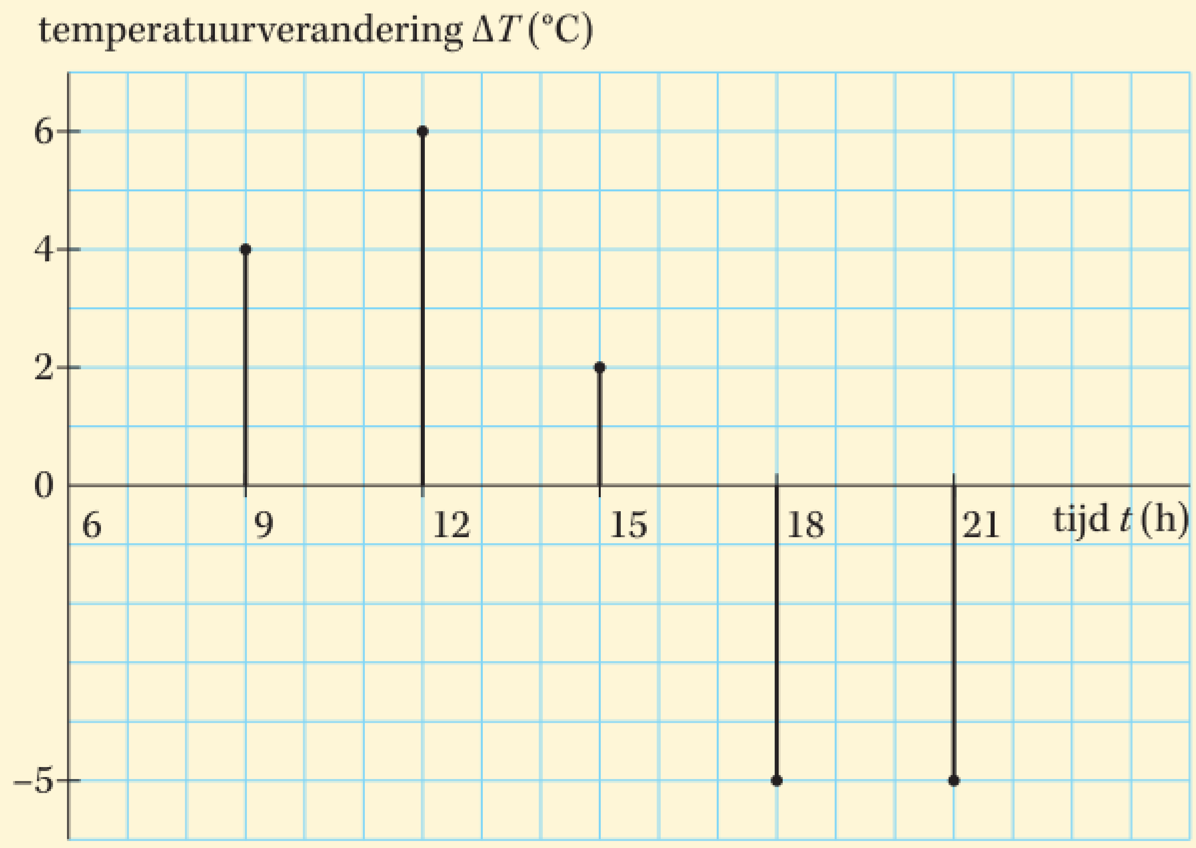
Toenamediagram

Een grafiek waarop veranderingen voorgesteld zijn met verticale staafjes op de horizontale as, noemen we een **toenamediagram**.

Voorbeeld

We tekenen een toenamediagram van de temperatuurveranderingen uit voorgaande tabel.

De temperatuurveranderingen over de tijdsintervallen [6, 9], [9, 12], [12, 15], [15, 18] en [18, 21] zetten we verticaal uit op de rechtergrenzen van deze intervallen.

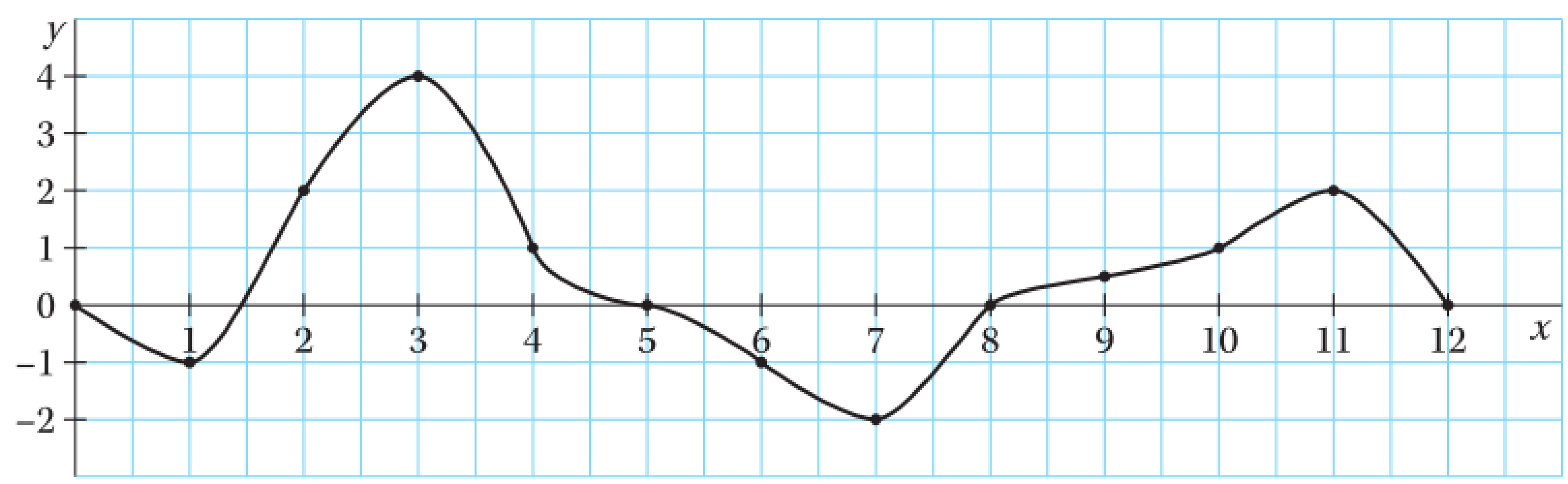


De stapgrootte Δt van het toenamediagram is 3 uur.

De temperatuurveranderingen ΔT lezen we af op de verticale as.

2

Gegeven is de grafiek van een functie f.



Bepaal de veranderingen van $f(x)$ over het interval.

1 $[1, 4]$: ....

2 $[3, 6]$: ....

3 $[1, 6]$: ....

4 $[3, 7]$: ....

5 $[2, 6]$: ....

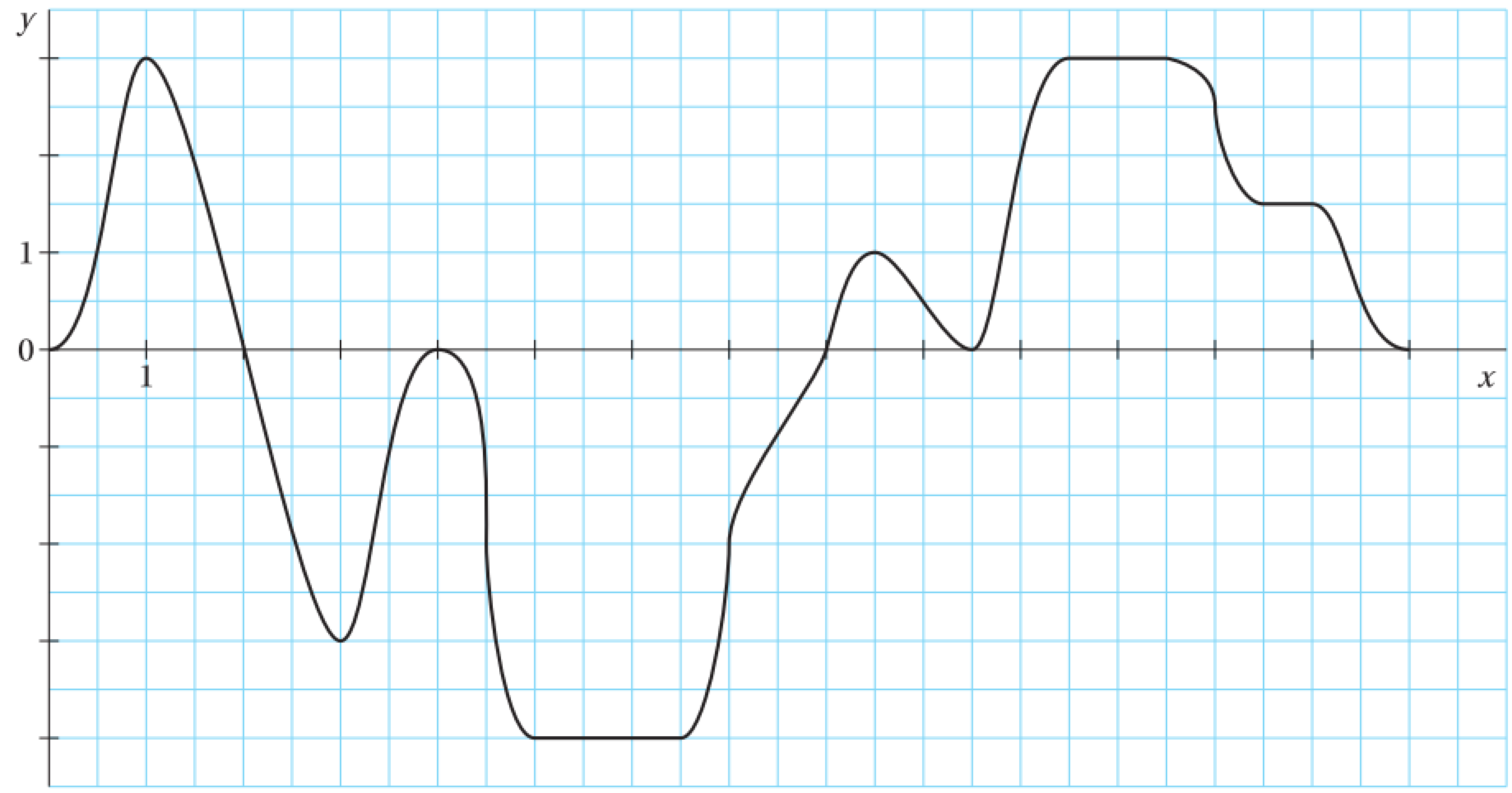
6 $[2, 3]$: ....

7 $[5, 7]$: ....

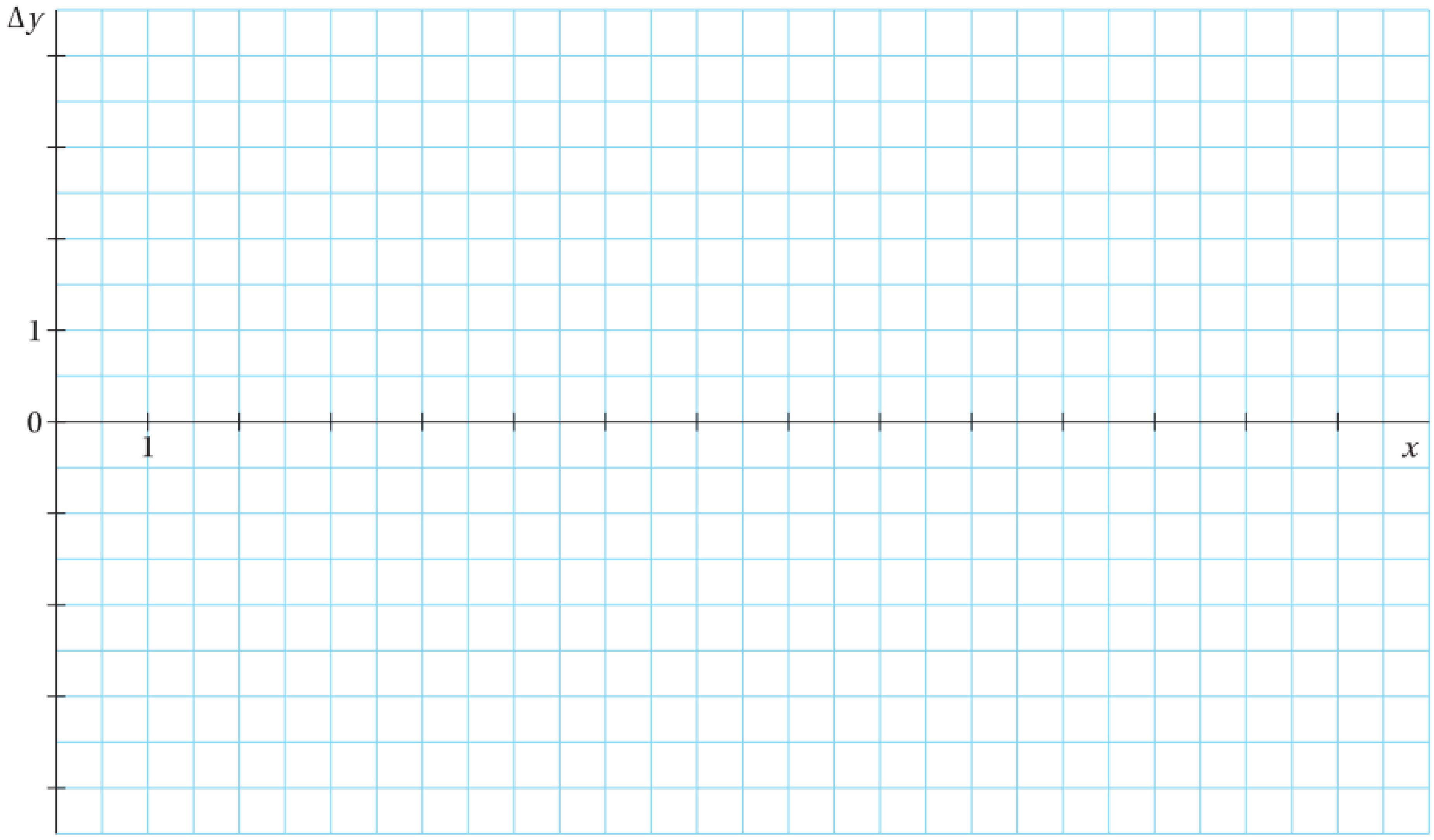
8 $[1, 9]$: ....

3

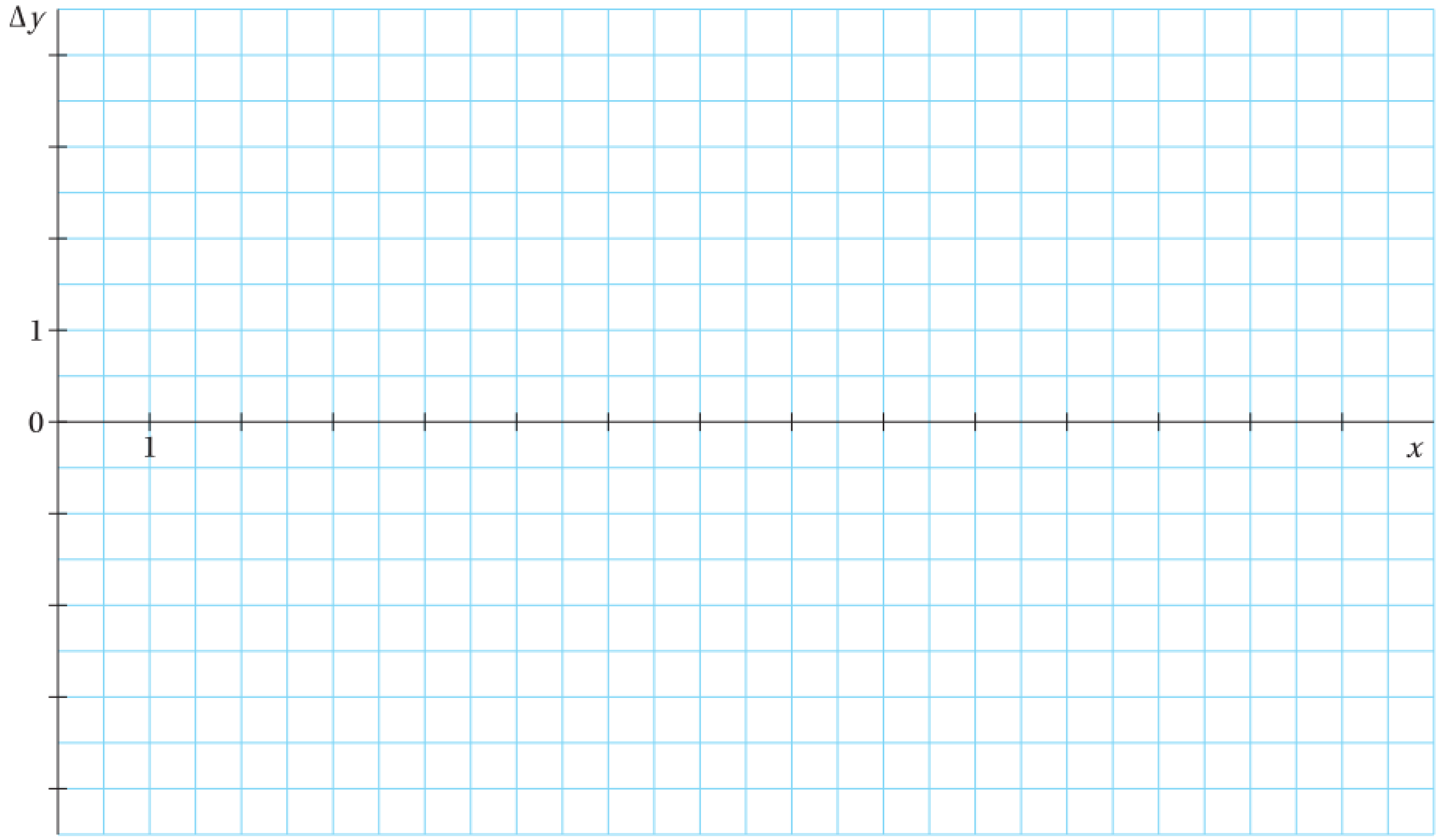
Teken bij de grafiek een toenamediagram met gegeven stapgrootte.



1 Stapgrootte $\Delta x = 1$

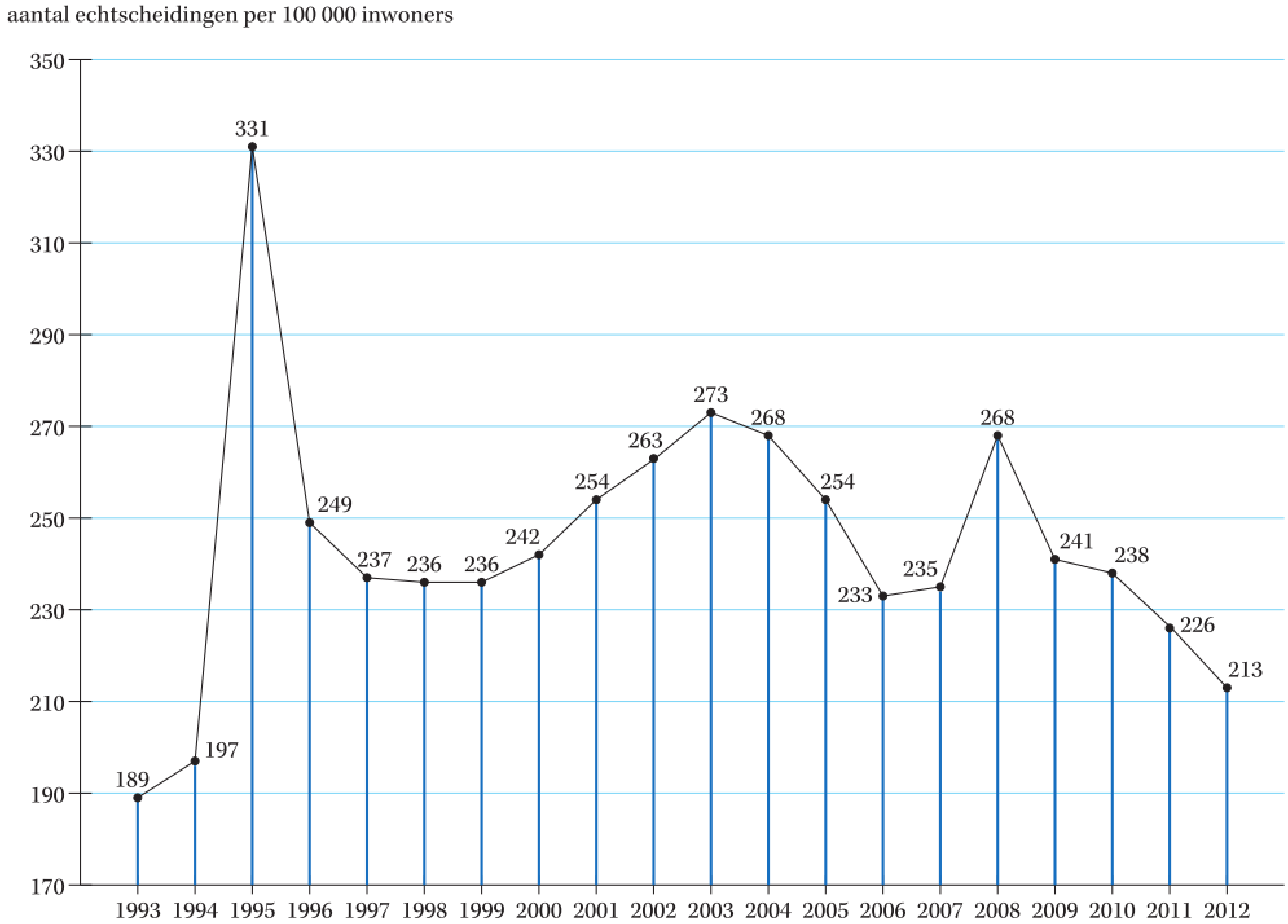


2 Stapgrootte $\Delta x = 2$



4

De evolutie van het aantal scheidingen per 100 000 inwoners in het Vlaamse Gewest tussen 1993 en 2012 lezen we af op de grafiek.



1 Voor de eeuwwisseling werd de procedure voor een echtscheiding met onderlinge toestemming van twee jaar ingekort tot zes maanden. Lees op de grafiek af in welk jaar dat gebeurde. Hoe zien we dit op de grafiek?

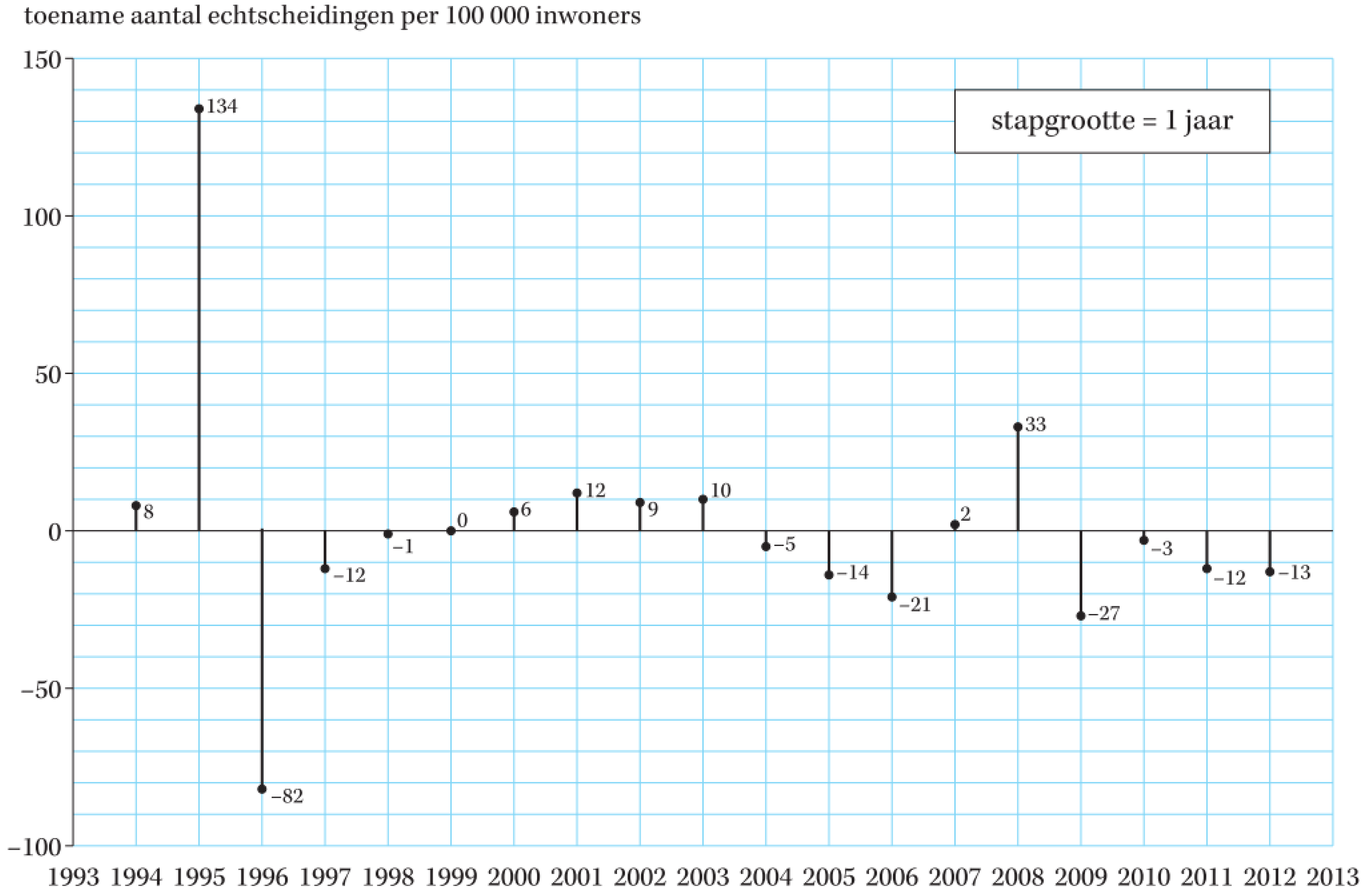
....

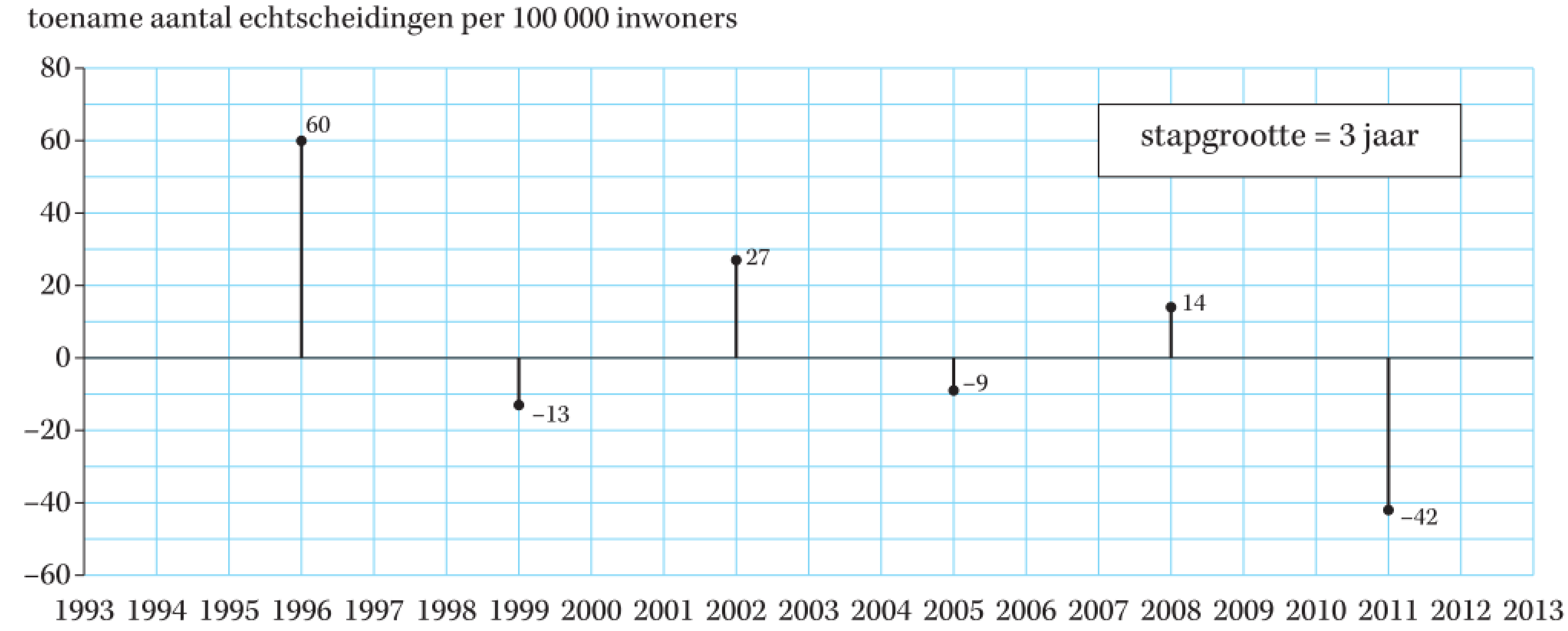
....

2 Gegeven zijn twee bijbehorende toenamediagrammen met verschillende stapgrootte.

Op welk toenamediagram stellen we deze wetswijziging het beste vast?

....





3 Wat is het nadeel van een toenamediagram met een te grote stapgrootte?

....

....

4 Hoe groot was sinds 1993 het maximaal aantal echtscheidingen per 100 000 inwoners?

....

5 Hoeveel echtscheidingen per 100 000 inwoners waren er toen meer dan in het vorige jaar?

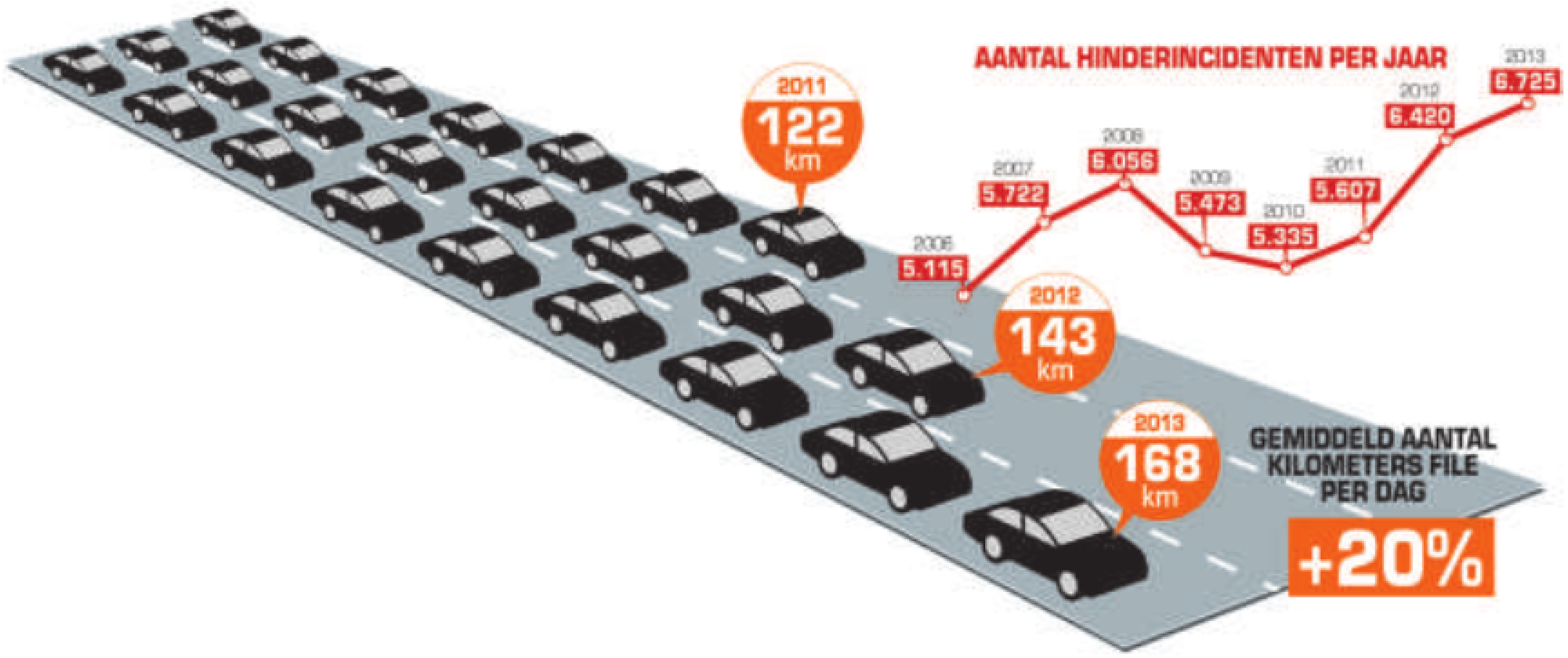
....

En hoeveel echtscheidingen per 100 000 inwoners meer dan het volgende jaar?

....

5

Het fileleed in Vlaanderen neemt toe. Dit is volgens een rapport van de Vlaamse overheid vooral te wijten aan het stijgend aantal 'hinderincidenten' op de wegen. Ongevallen, vrachtwagens die hun lading verliezen en versperde rijstroken zorgden in 2013 voor zowat 6725 hinderincidenten.



Bron: Het Laatste Nieuws

1 Bereken de veranderingen van het aantal hinderincidenten. Vul de tabel in.

jaar	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
aantal incidenten	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
verandering		.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2 In welke jaren nam het aantal hinderincidenten af? ....

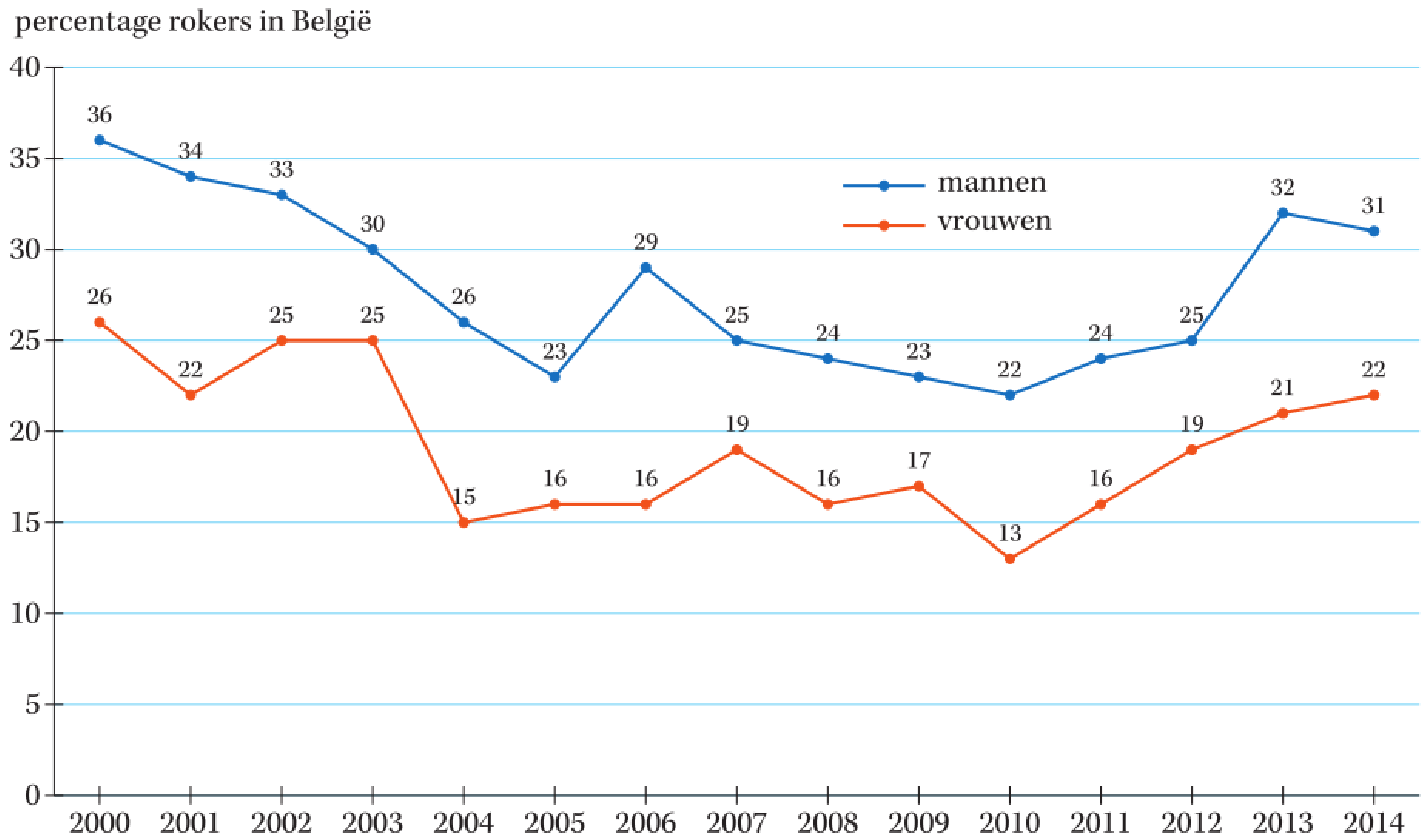
3 In welk jaar steeg het aantal hinderincidenten het sterkst? ....

4 Met hoeveel procent is het aantal hinderincidenten in 2013 gestegen t.o.v. 2006?

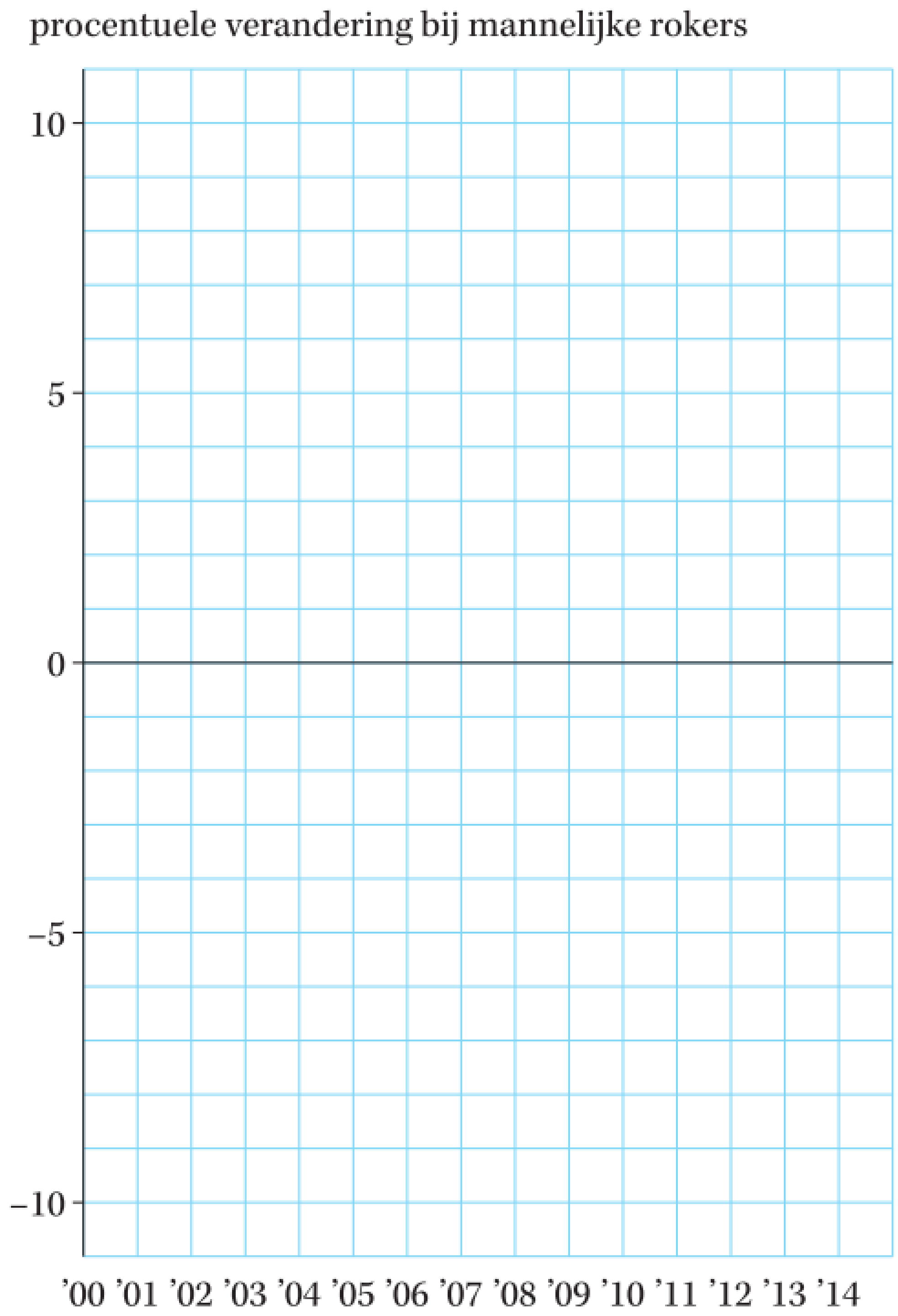
....

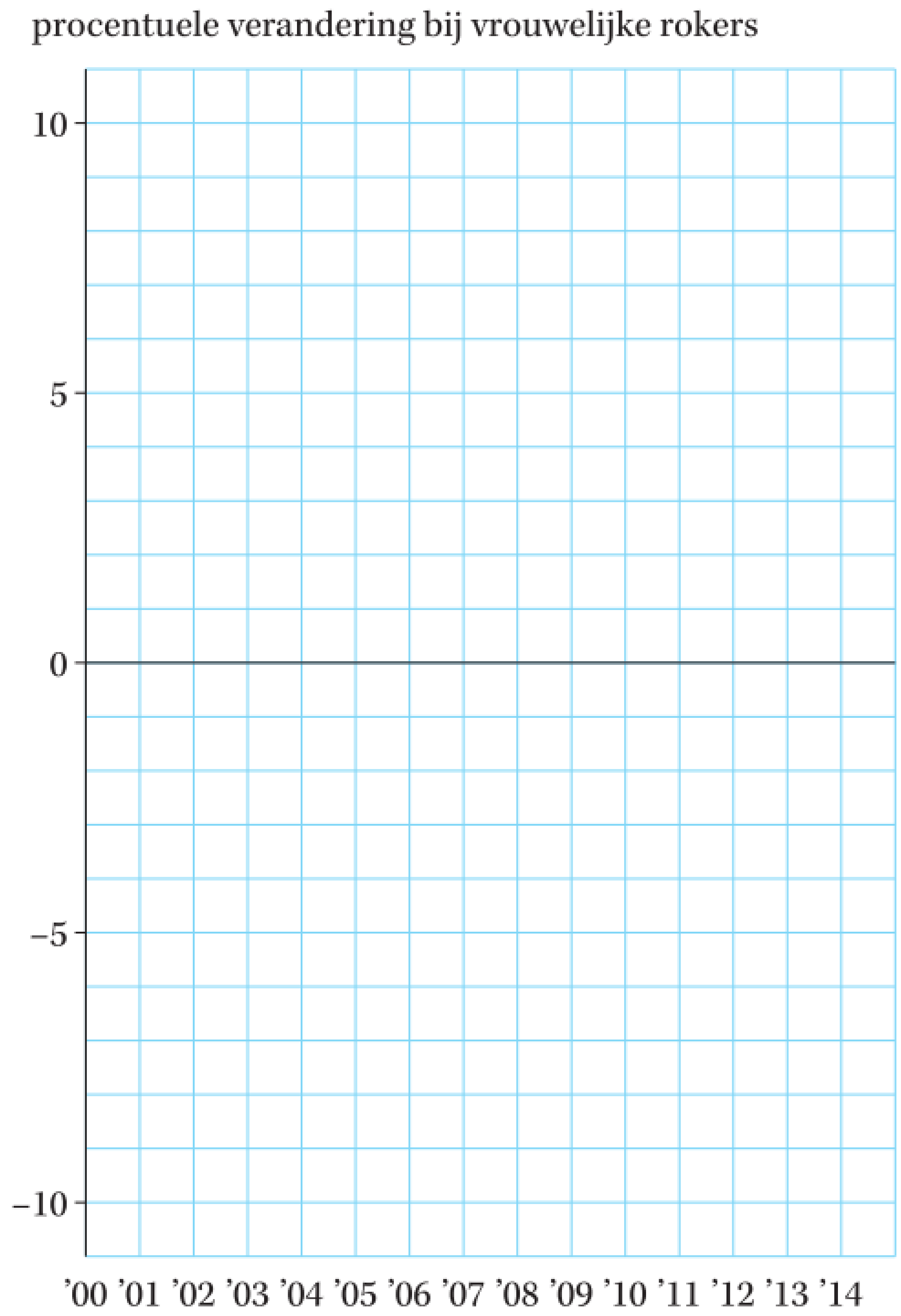
6

Op het vergelijkend lijndiagram wordt de evolutie van het aantal rokende mannen en vrouwen ouder dan 15 jaar weergegeven voor de periode van 2000 tot 2014.



1 Teken bij elk lijndiagram een toenamediagram met een stapgrootte van 1 jaar.





2 Wanneer is het percentage mannelijke rokers het sterkst toegenomen? ....

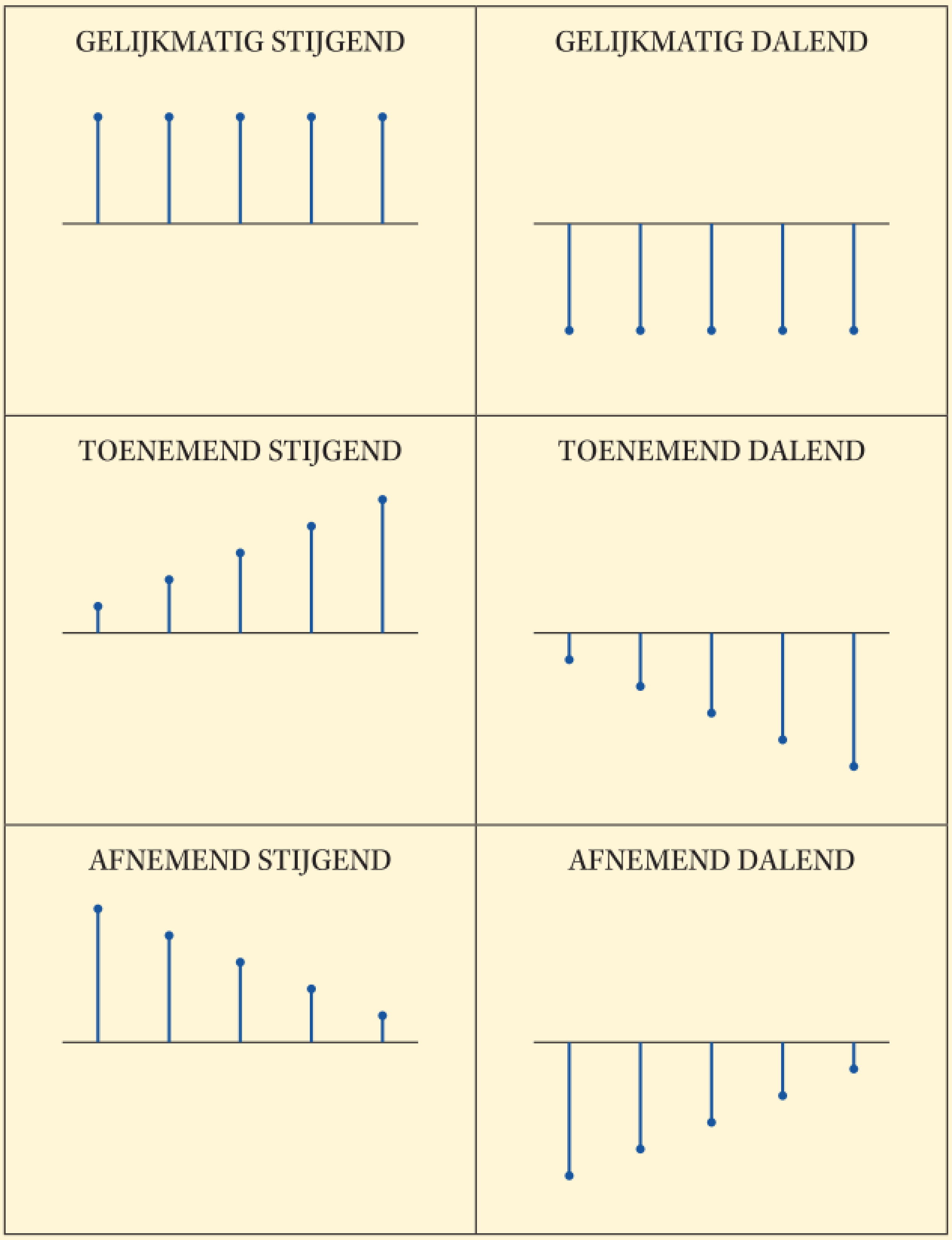
3 Wanneer is het percentage vrouwelijke rokers het sterkst afgenomen? ....

4 Hoeveel maal is het percentage rokende mannen gedaald? ....

5 Hoeveel maal is het percentage rokende vrouwen ongewijzigd gebleven? ....

Toenamediagrammen lezen

Op een toenamediagram kunnen we de verschillende soorten stijgen en dalen van de bijbehorende grafiek aflezen. De ligging en de lengte van de staafjes van een toenamediagram vertellen ons hoe de bijbehorende grafiek stijgt of daalt.



Voor staafjes **boven** de horizontale as, is de grafiek **stijgend**. Voor staafjes **onder** de horizontale as, is de grafiek **dalend**.

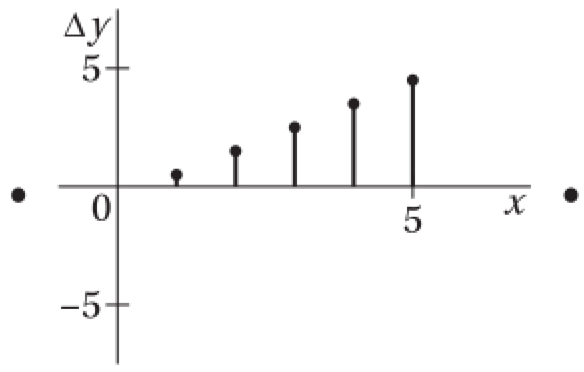
Als de staafjes **even lang** zijn, dan is de grafiek **gelijkmatig** stijgend of dalend.

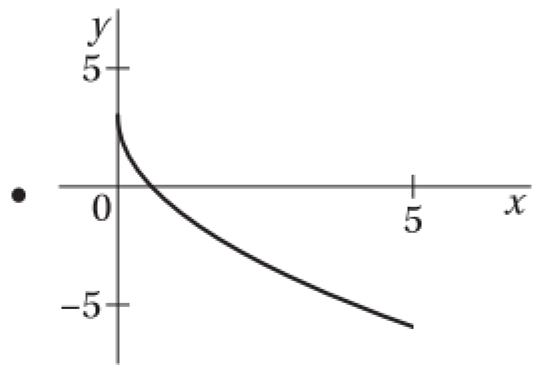
Staafjes die van links naar rechts **langer** worden, wijzen op een **toenemend stijgende** of **toenemend dalende** grafiek. Als ze **korter** worden, dan is de grafiek **afnemend stijgend** of **afnemend dalend**.

7

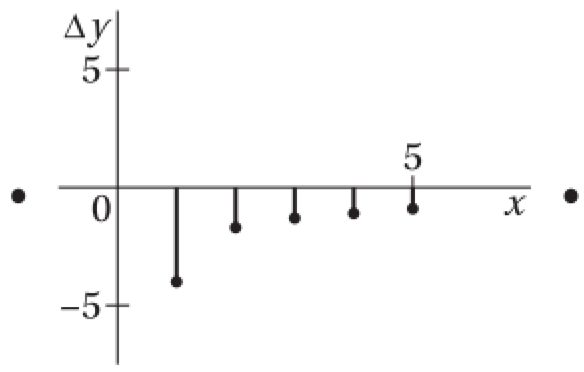
Verbind elke omschrijving met het passende toenamediagram en vervolgens met de bijbehorende grafiek.

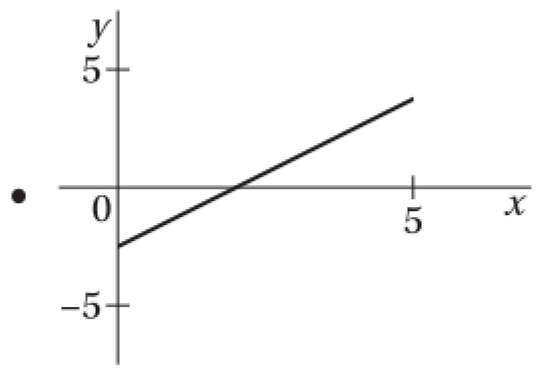
gelijkmatig stijgend •



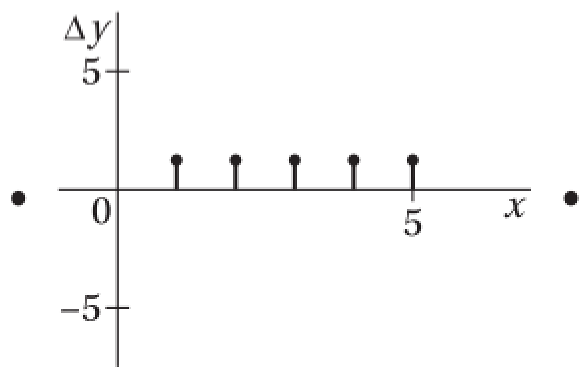


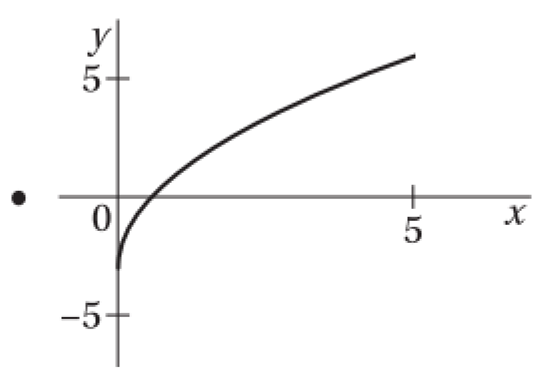
toenemend stijgend •



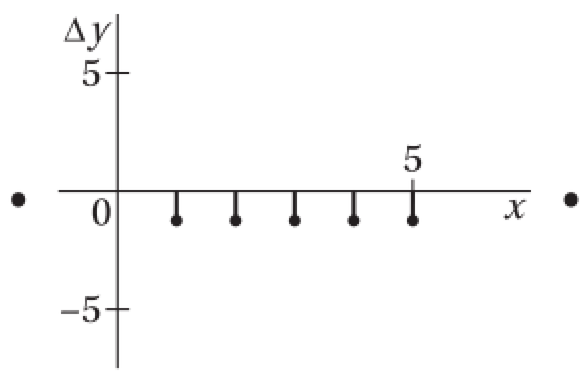


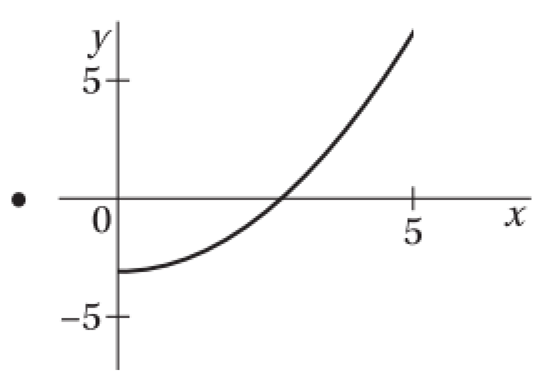
afnemend stijgend •



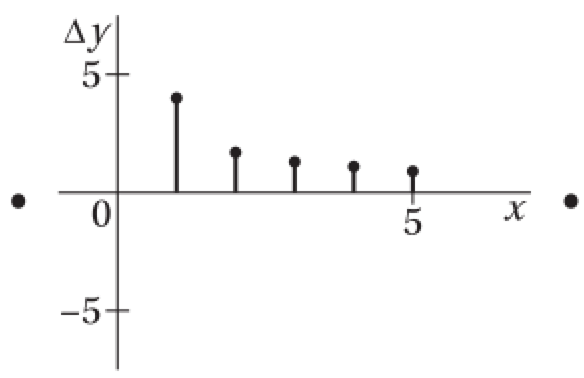


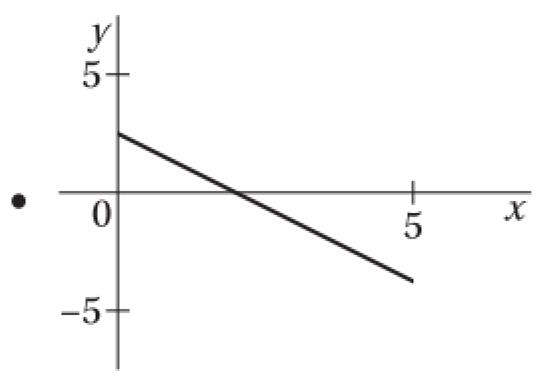
gelijkmatig dalend •



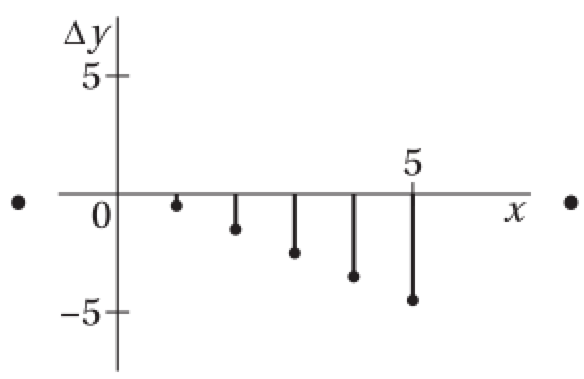


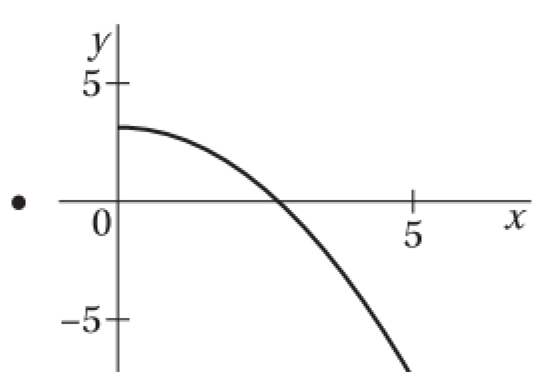
toenemend dalend •





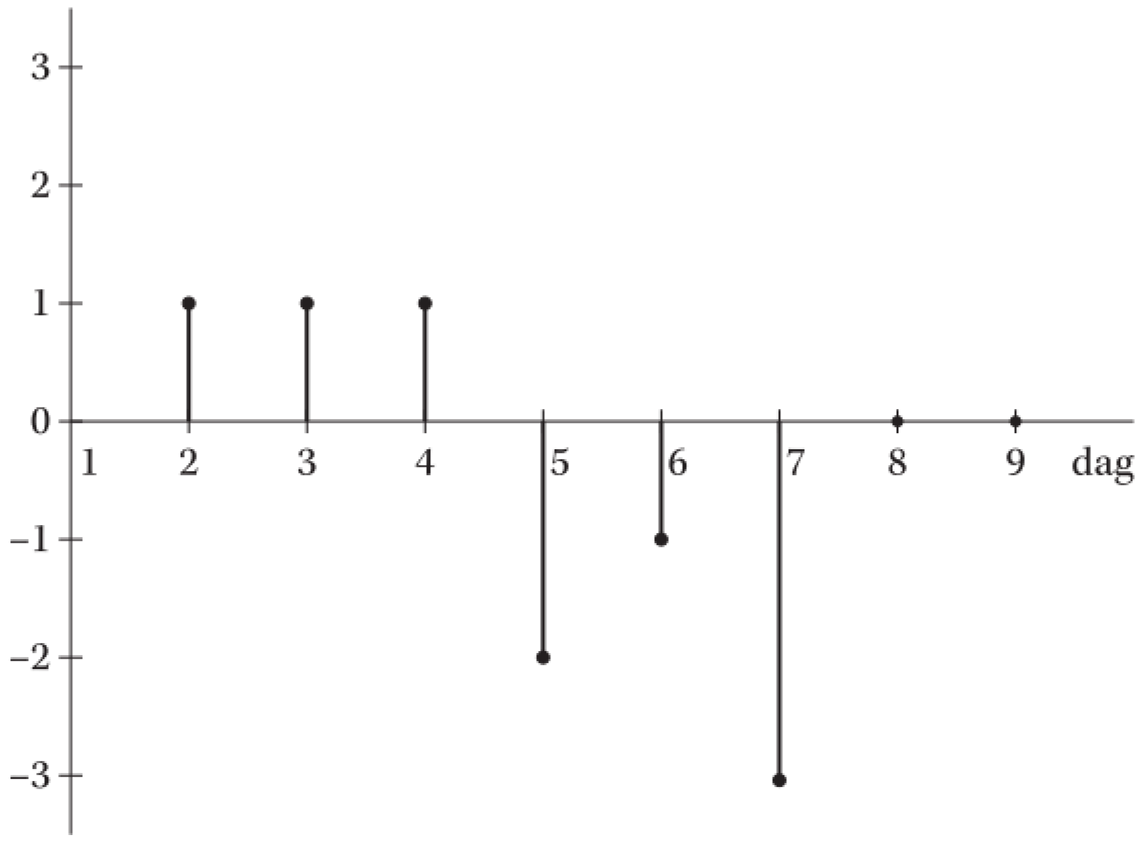
afnemend dalend •





8

Elke dag van de zomervakantie meet Milan op de middag de temperatuur. Het toenamediagram laat zien hoe de temperatuur de eerste negen dagen evolueert.



1 Beschrijf de temperatuurschommelingen per dag

a van dag 1 tot dag 4: ....

b van dag 4 tot dag 7: ....

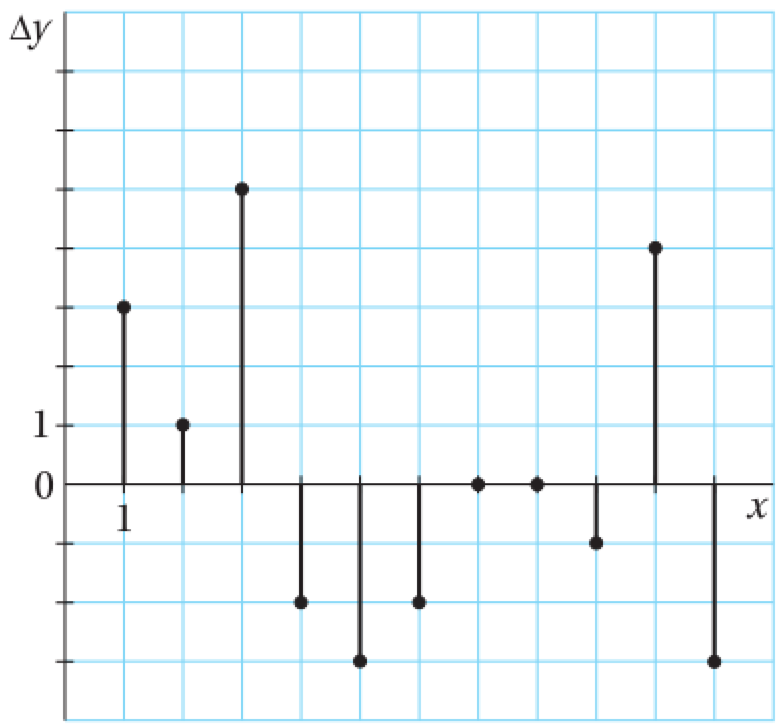
c van dag 7 tot dag 9: ....

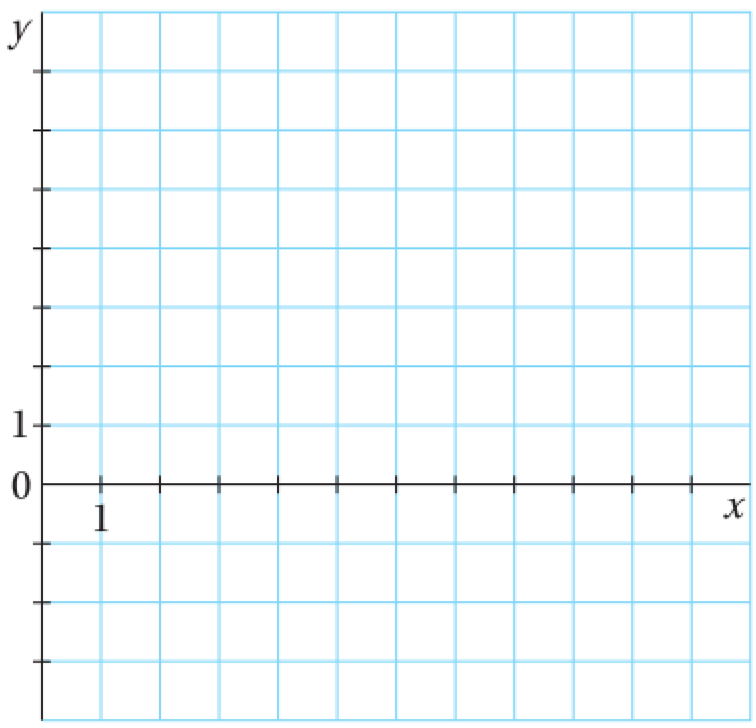
2 Waarom kunnen we de temperatuurgrafiek bij dit toenamediagram niet tekenen?

....

9

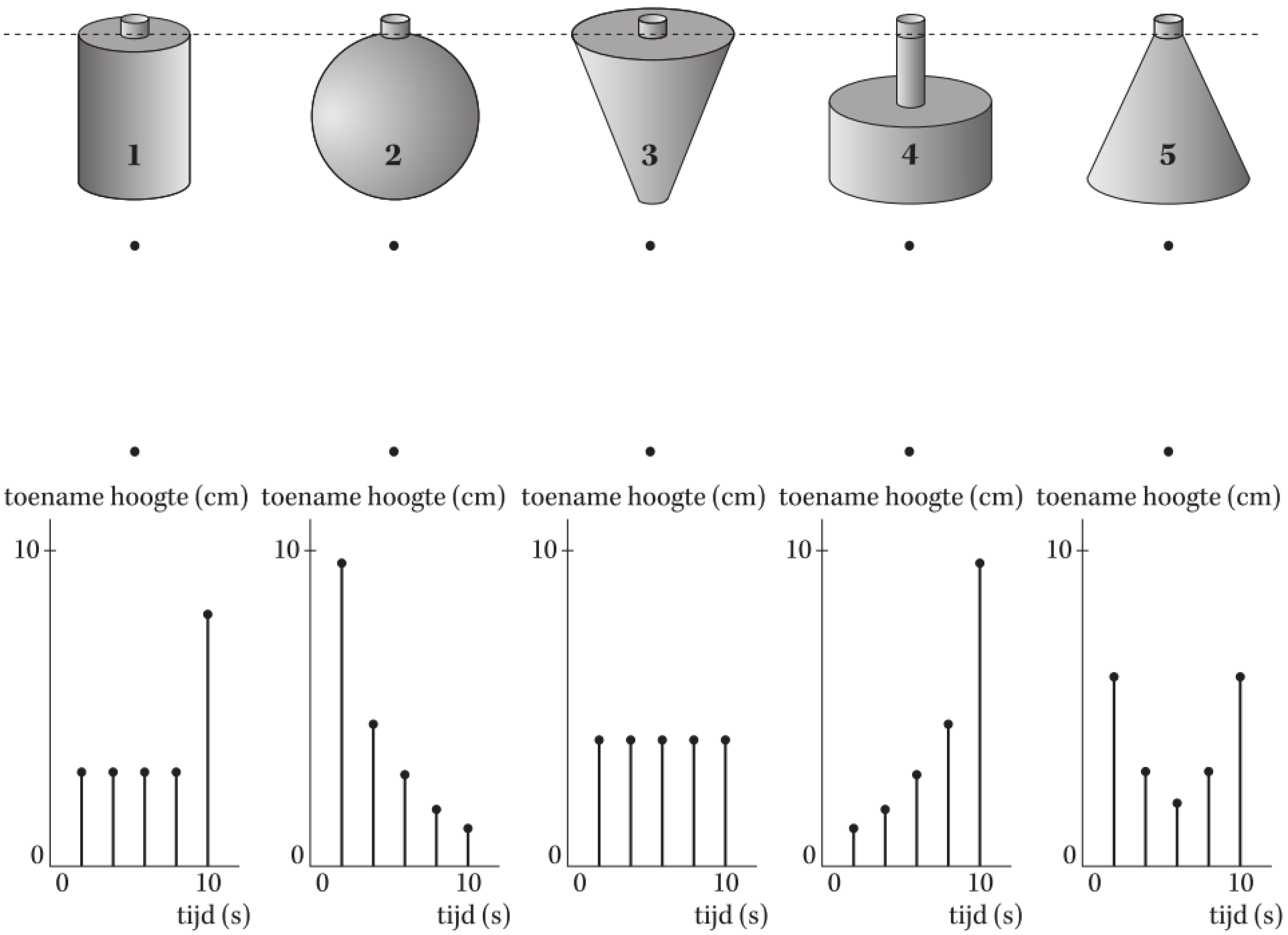
Schets een grafiek die de y-as snijdt in het punt $(0, -2)$ en het volgende toenamediagram vertoont.





10

De volgende designflessen met gelijke inhoud worden in 10 seconden gevuld tot het aangeduide merkteken. Verbind elke fles met het bijbehorende toenamediagram.



11

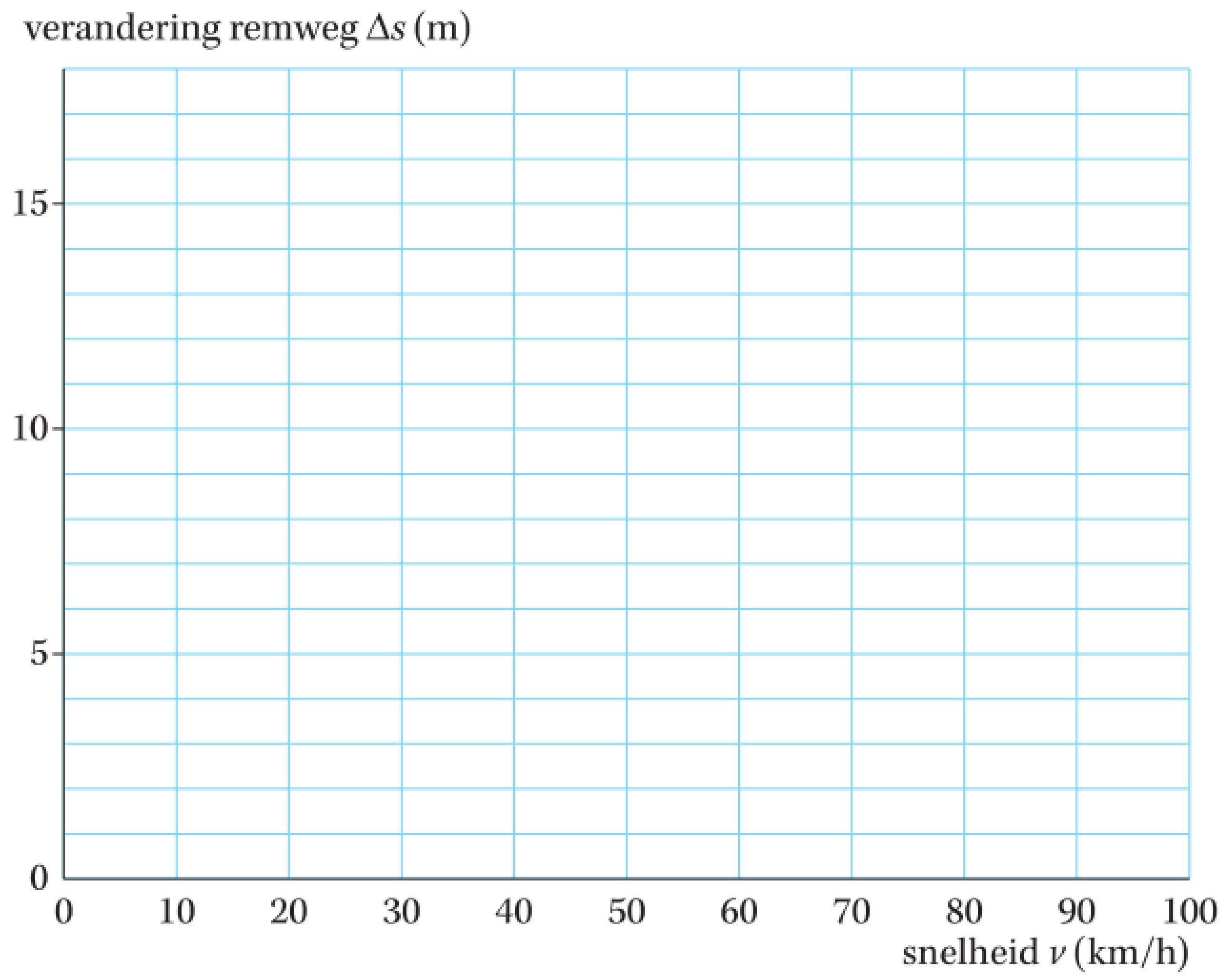
In de tabel lezen we het verband af tussen de snelheid van een wagen en de remweg op een nat wegdek.

snelheid v (km/h)	30	40	50	60	70	80
remweg s (m)	9	16	25	36	49	64
verandering remweg Δs (m)		....	....	....	....	....



1 Vul de tabel aan met de verandering van de remweg Δs.

2 Stel de verandering voor met een toenamediagram.



3 Hoe noemen we dit toenamediagram? Vink aan.

gelijkmatig stijgend	toenemend stijgend	afnemend stijgend
☐	☐	☐

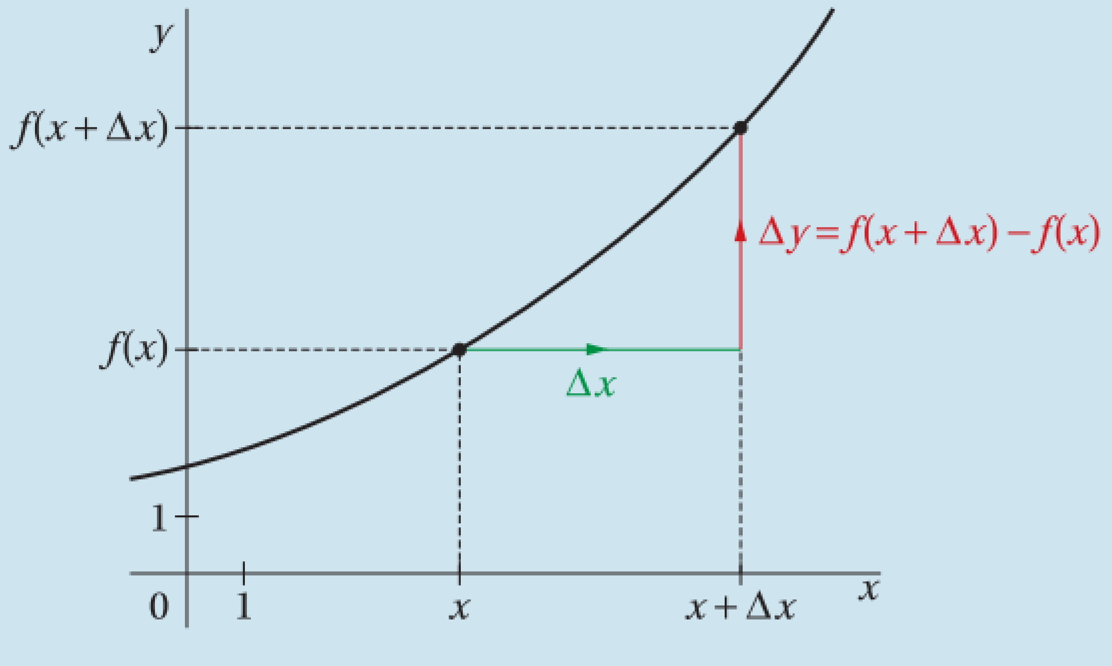
4 Wat is de remweg van een wagen met een snelheid van 90 km/h?

....

Veranderingen berekenen met tabellen

We berekenen de veranderingen van de functie $f(x) = 0{,}25x^2$ over intervallen met stapgrootte 2 voor $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

De verandering van $f(x)$ over een interval met stapgrootte Δx berekenen we met de differentie $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.



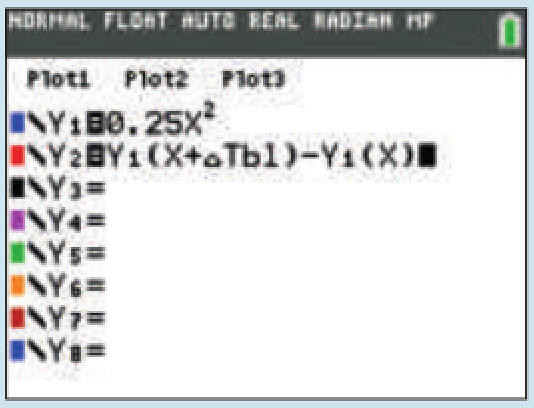
TEXAS INSTRUMENTS

Om veranderingen van $f(x) = 0{,}25x^2$ te berekenen, voeren we een bijkomende functie in: $g(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Daarna stellen we de tabelvariabelen in: startwaarde –4 en stapgrootte 2. De tabel roepen we op met de toets TABLE.

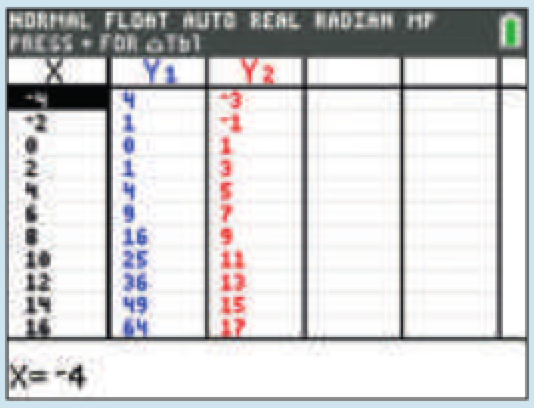
- [Y=] 0,25x^2 [▼]

  [ALPHA] [F4] [1: Y1] [(] x [+] [VARS] [6: Table] [2: ΔTbl] [)] [–] [ALPHA] [F4] [1: Y1] [(] x [)]
- [2ND] [TBLSET] –4 [ENTER] 2 [ENTER] [Indpt: kies Auto] [▼] [Depend: kies Auto]

  [2ND] [TABLE]







De veranderingen worden getoond in de derde kolom Y2 van de tabel. Bij elke x-waarde staat de verandering over het interval $[x, x + 2]$.

CASIO

Om veranderingen van $f(x) = 0{,}25x^2$ te berekenen, voeren we twee bijkomende functies in: $g(x) = 0{,}25(x + \Delta x)^2$ en $h(x) = g(x) - f(x)$. Daarna stellen we de tabelvariabelen in: startwaarde –4, eindwaarde 4 en stapgrootte 2. De tabel roepen we op met de toets F6 (TABL).

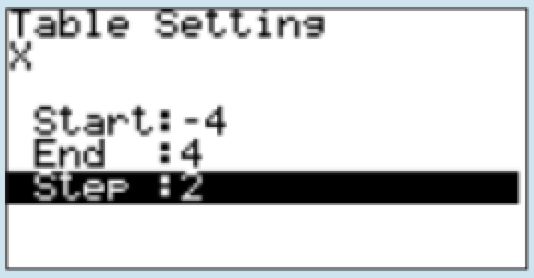
- [MENU] [5: TABLE] 0,25x^2 [EXE]

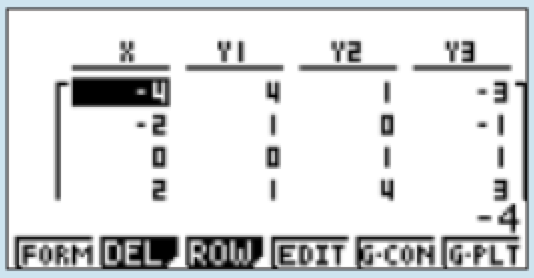
  0,25 [(] x [+] [VARS] [F6: ▷] [F1: TABL] [F3: Pitch] [)] [x²] [EXE]

  [VARS] [F4: GRPH] [F1: Y] 2 [–] [VARS] [F4: GRPH] [F1: Y] 1 [EXE]
- [F5: SET] –4 [EXE] 4 [EXE] 2 [EXE] [EXE]

  [F6: TABL]







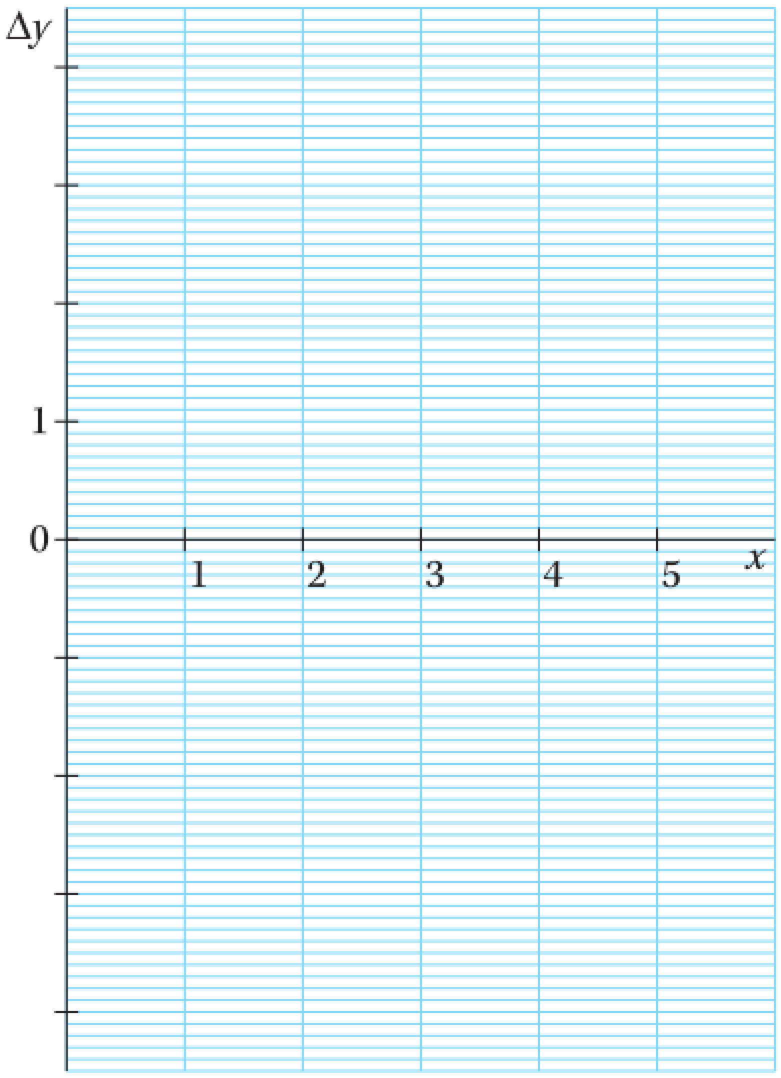
De veranderingen worden getoond in de vierde kolom Y3 van de tabel. Bij elke x-waarde staat de verandering over het interval $[x, x + 2]$.



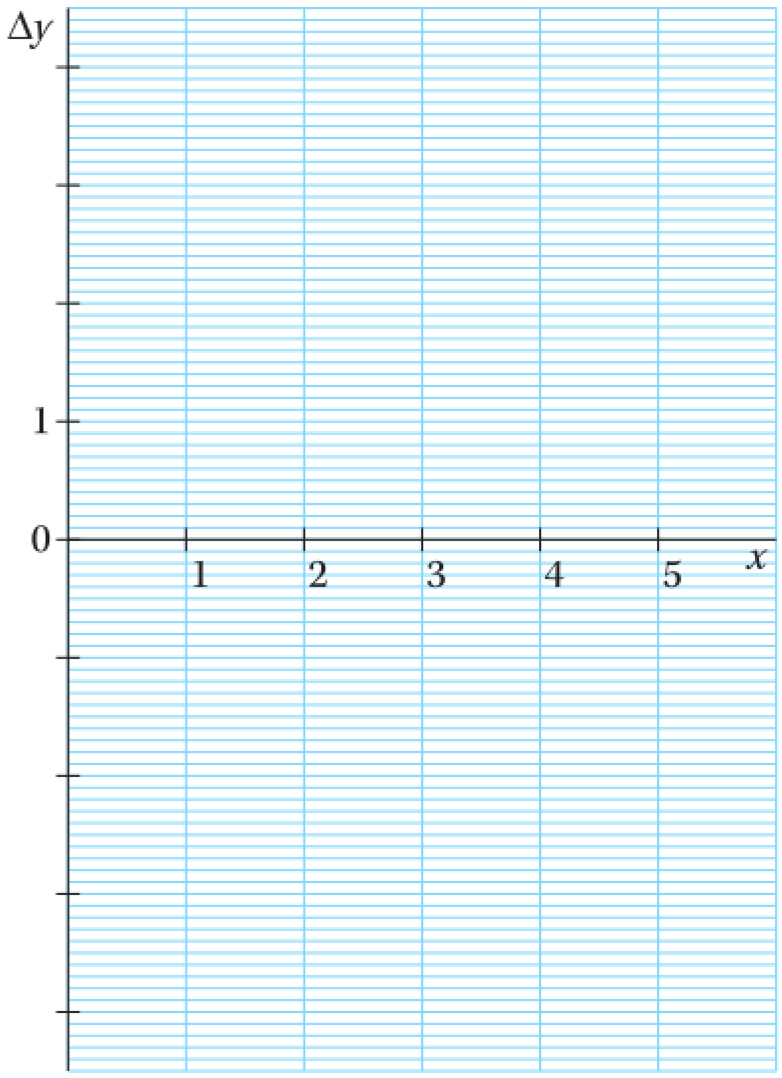
12

Teken een toenamediagram met stapgrootte $\Delta x = 1$ van de functie met werkdomein [0, 5].

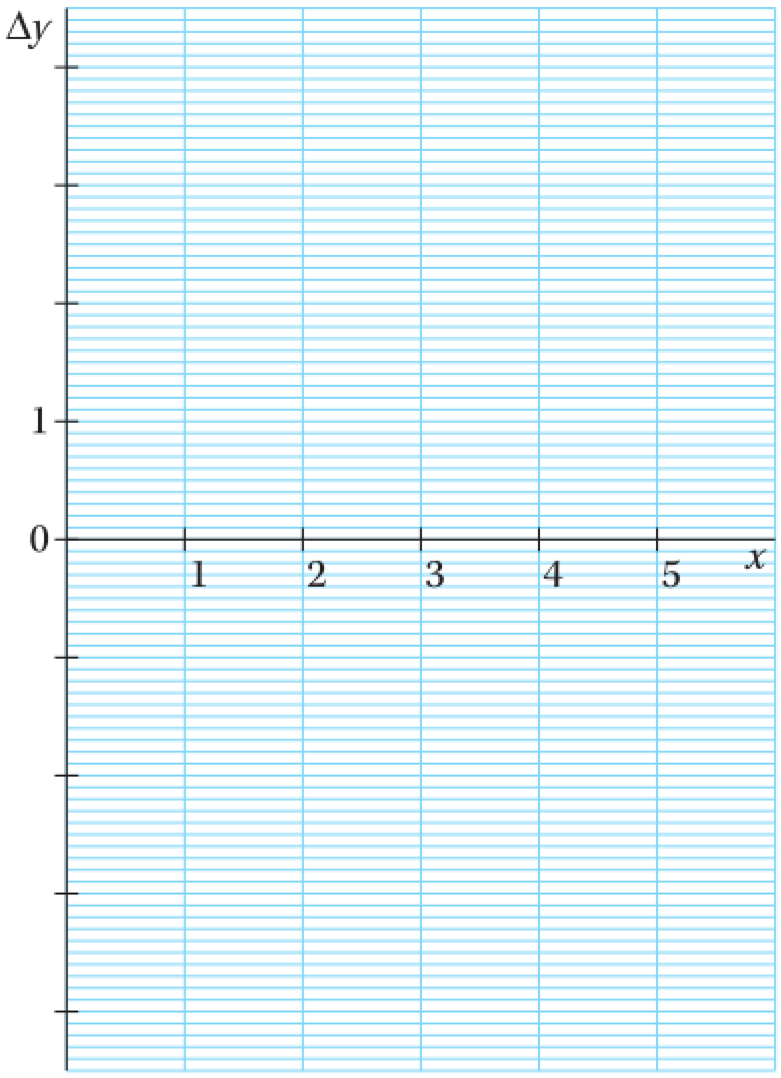
1 $f(x) = -x^2 + 5x - 7$



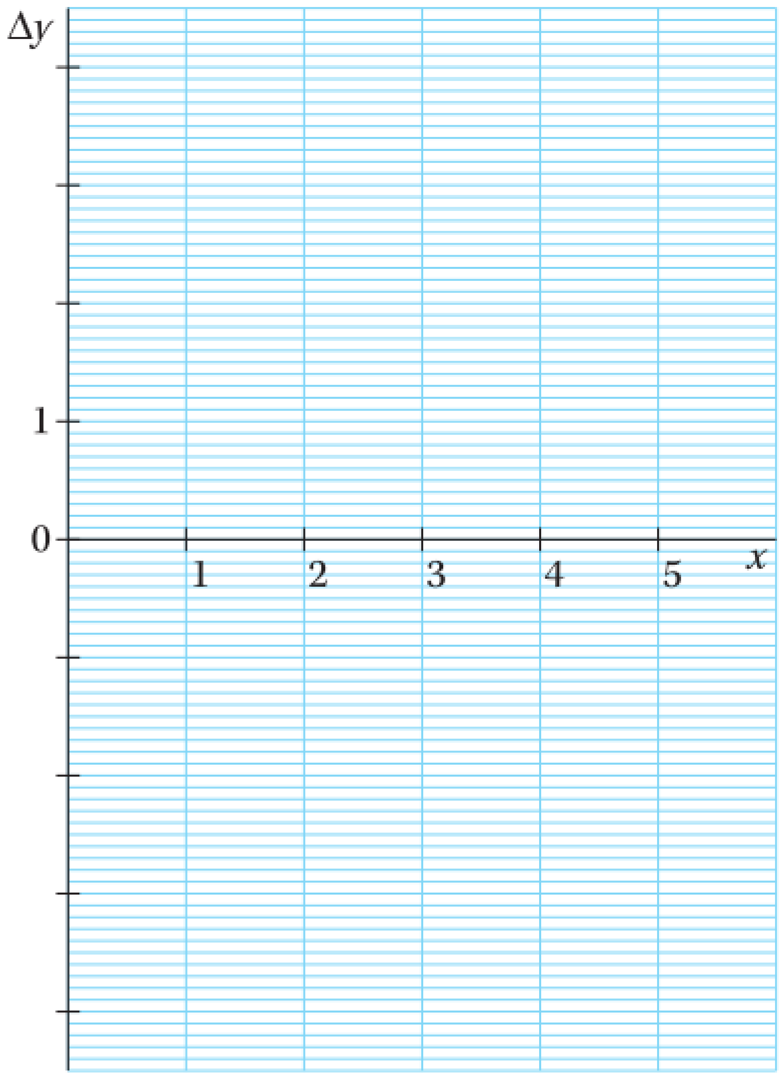
2 $f(x) = 0{,}75x^2 - 3x$



3 $f(x) = -0{,}05x^3$



4 $f(x) = 0{,}01x^4 + 0{,}2x$



13

Het aantal inwoners van een Antwerpse gemeente laat zich sinds het jaar 2000 beschrijven door de functie $f(x) = 5x^3 - 85x^2 + 80x + 4000$, waarbij x het aantal jaren na 2000 voorstelt.

1 Hoeveel inwoners kwamen er in 2001 bij?

....

....

2 Hoe veranderde het aantal inwoners over de periode 2005-2006?

....

....

3 In welk jaar zet de dalende trend zich om in een stijgende trend?

....

4 Met hoeveel inwoners groeide de gemeente aan over de periode 2010-2014?

....

....

5 Hoeveel inwoners zal deze gemeente hebben in 2020?

....

....

6 Als deze trend zich blijft voortzetten, in welk jaar wordt dan het aantal van 100 000 inwoners overschreden?

....

Gemiddelde verandering en gemiddelde helling

1 Instap

In 2014 telt België meer dan 11 miljoen inwoners. De tabel toont de omvang en de groei van de bevolking in België tussen 1900 en 2012.



jaartal t	bevolkingsomvang n	bevolkingsgroei Δn	gemiddelde groei per jaar
1900	6 693 548		
1930	8 092 004	1 398 456	....
1970	9 650 944	1 558 940	....
2000	10 239 085	588 141	....
2012	11 035 948	796 863	....

1 Hoe groot is de bevolkingsgroei Δn van 2000 tot 2012?

....

2 Wat is de stapgrootte Δt van elk tijdsinterval uit de eerste kolom?

Van 1900 tot 1930: ....

Van 1930 tot 1970: ....

Van 1970 tot 2000: ....

Van 2000 tot 2012: ....

3 Waarom heeft het geen zin om de bevolkingsgroei over deze perioden met elkaar te vergelijken?

....

4 Wat is voor elk tijdsinterval de gemiddelde groei per jaar van de bevolking? Vul de laatste kolom van de tabel in.

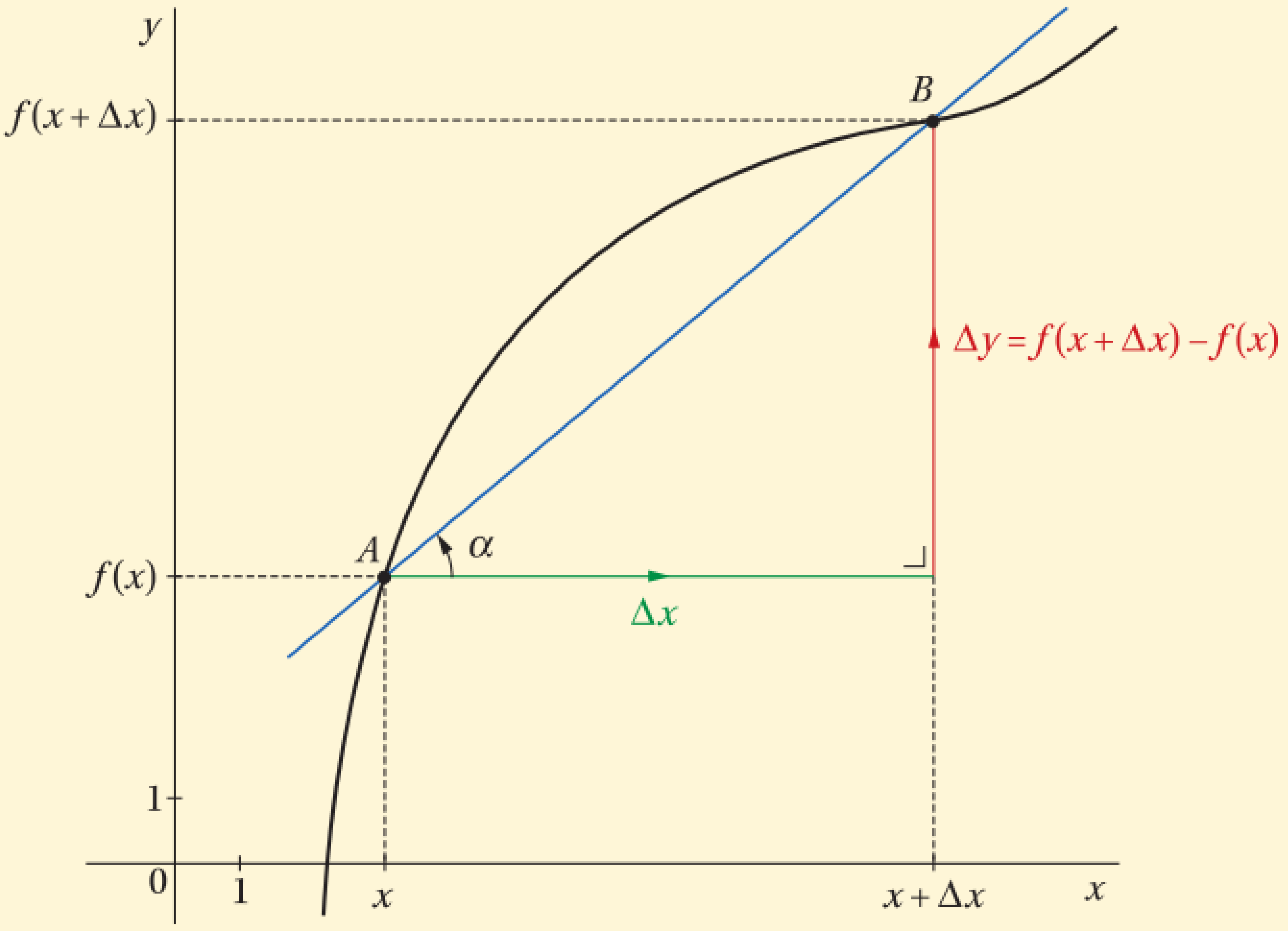
5 In welk tijdsinterval is de gemiddelde groei per jaar het sterkst? ....

6 Wat is de formule waarmee we de gemiddelde groei per jaar berekend hebben?

Gebruik de delta-notatie. ....

Differentiequotiënt

De grafiek laat de verandering van de functie $y = f(x)$ zien over het interval $[x, x + \Delta x]$. Hierin stelt x een willekeurig origineel van f voor en Δx een willekeurige toename.



De helling van de rechte door de punten $A(x, f(x))$ en $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ wordt bepaald door de richtingscoëfficiënt van de rechte AB.

$$\text{rico } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{rico } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Dit quotiënt noemen we:

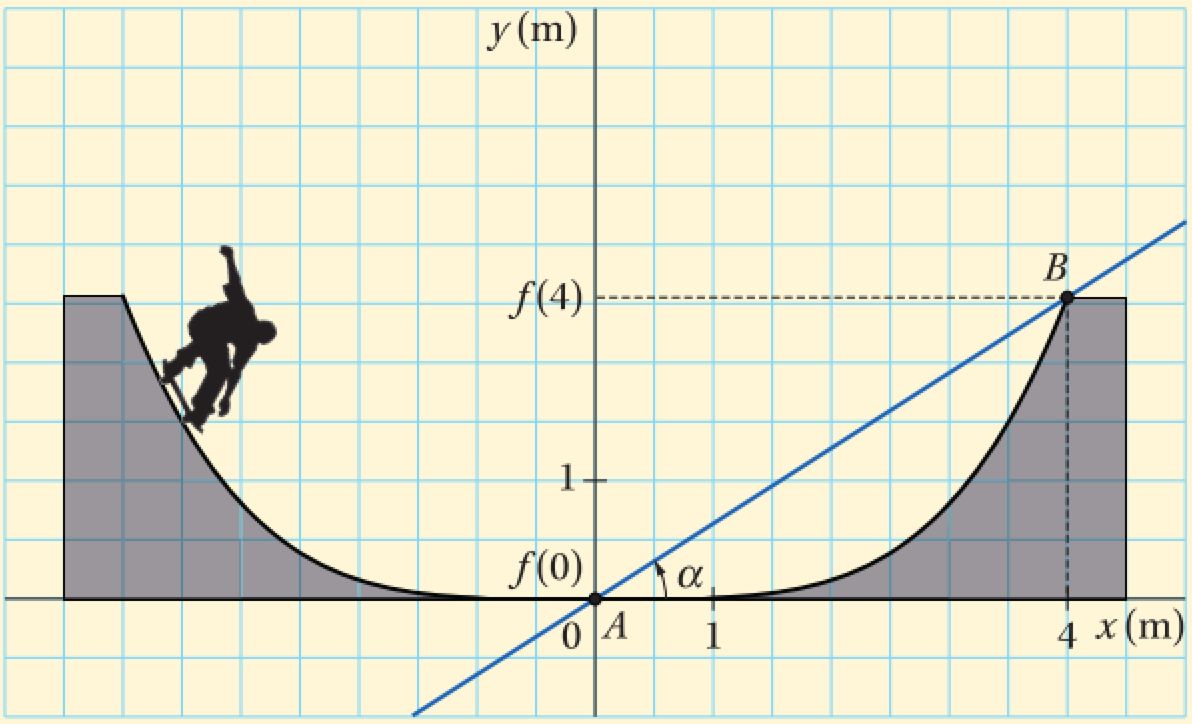
- het **differentiequotiënt** van de functie f over het interval $[x, x + \Delta x]$.
- de **gemiddelde helling** van de grafiek van f over het interval $[x, x + \Delta x]$.
- de **gemiddelde verandering** van de functiewaarde $f(x)$ over het interval $[x, x + \Delta x]$.

De scherpe hoek α die de rechte AB maakt met de positieve x-as noemen we de **gemiddelde hellingshoek** van de grafiek over het interval $[x, x + \Delta x]$ en berekenen we met de formule:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{of} \quad \tan \alpha = \text{rico } AB$$

Voorbeeld

De profieldoorsnede van een skateboardpiste heeft als voorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$ met dom $f = [-4, 4]$. We berekenen de gemiddelde helling en de gemiddelde hellingshoek van het rechterdeel van de ramp.



De gemiddelde helling van het rechterdeel van de ramp of de gemiddelde helling van de grafiek van f over het interval $[0, 4]$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de rechte AB:

$$\text{rico } AB = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{0{,}01 \cdot 4^4 - 0}{4} = 0{,}01 \cdot 4^3 = 0{,}64$$

rico $AB = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

De gemiddelde helling van het rechterdeel van de ramp is 0,64.

De gemiddelde hellingshoek α berekenen we met de toets TAN^{-1} of Atn.

$\tan \alpha = 0{,}64$

$\tan \alpha = \text{rico } AB$

$\alpha = 32{,}619...°$

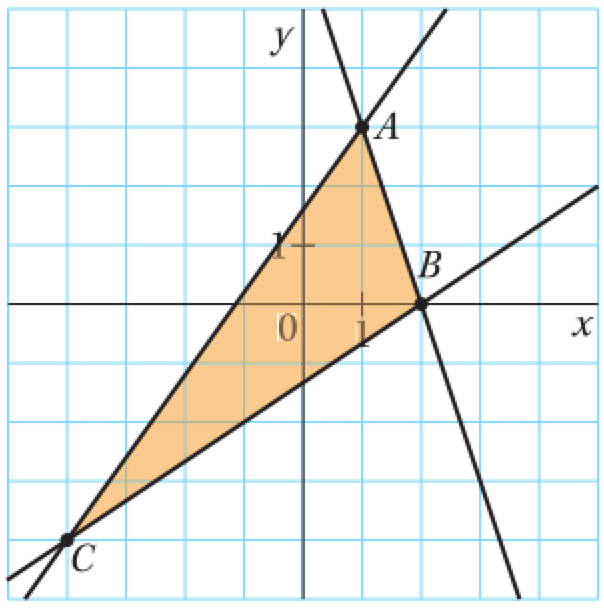
De gemiddelde hellingshoek van het rechterdeel van de ramp is 33°.



2

Bereken de richtingscoëfficiënt van de rechten die de driehoek omsluiten.

1

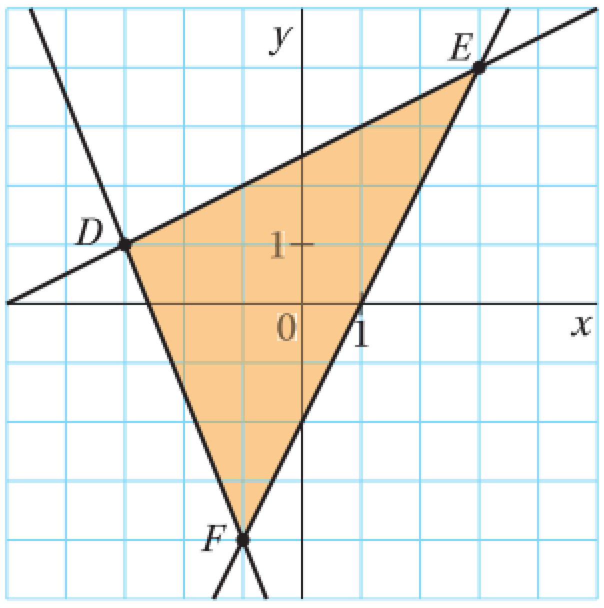


rico AB = ...

rico BC = ...

rico AC = ...

2



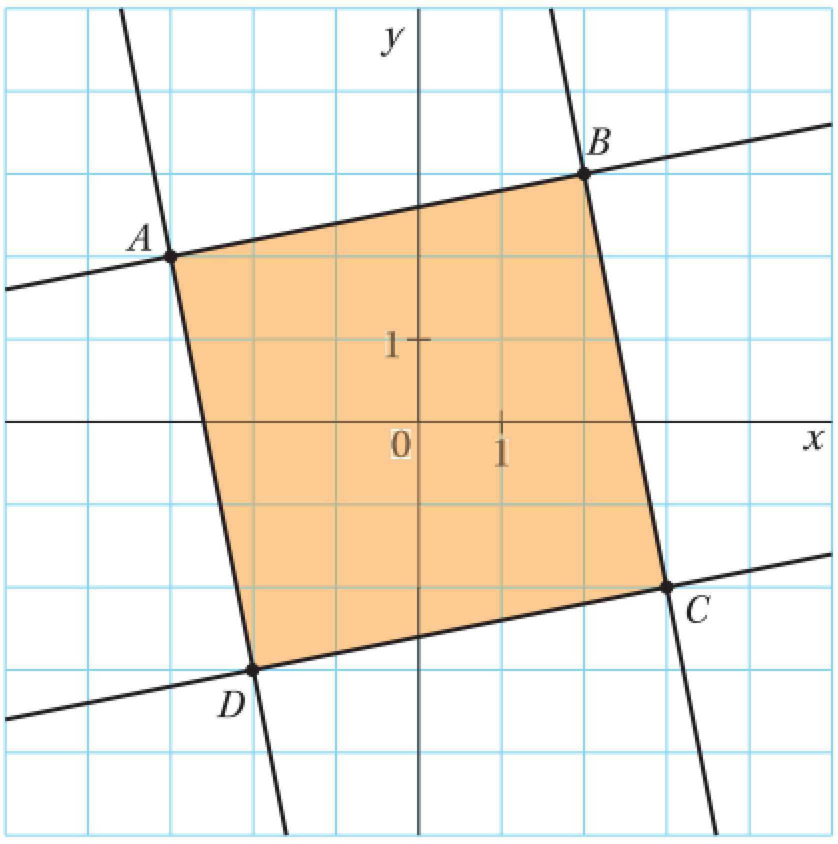
rico DE = ...

rico EF = ...

rico DF = ...

3

Bereken de richtingscoëfficiënt en de hellingshoek van de rechten die het vierkant omsluiten.
Rond af op 1°.



rico AB = ...

hellingshoek AB = ...

rico BC = ...

hellingshoek BC = ...

rico CD = ...

hellingshoek CD = ...

rico AD = ...

hellingshoek AD = ...

4

In de tabel vinden we de cijfers over het aantal misdrijven dat in België gepleegd werd gedurende de periode 2008-2012.

jaartal	2008	2009	2010	2011	2012
totaal aantal misdrijven	1 005 470	1 022 700	1 023 894	1 058 136	1 021 170

1 In welk jaar steeg de criminaliteit het meest? ....

2 In welk jaar daalde de criminaliteit? ....

3 Wat is de gemiddelde verandering $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ van het aantal misdrijven per jaar over de gegeven periode?

....

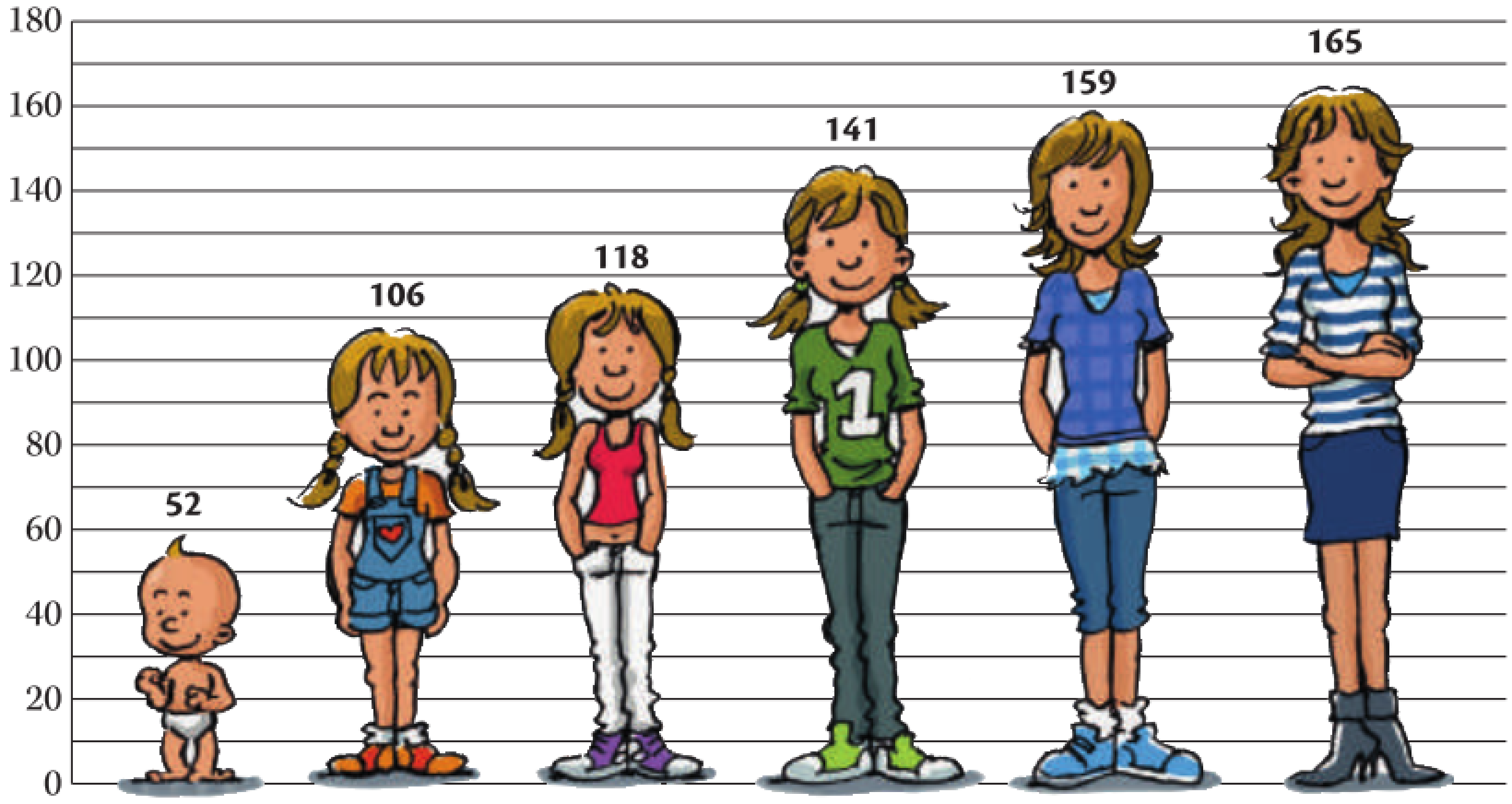
....



5

De ouders van Amber hebben de lichaamslengte van hun dochter van jaar tot jaar opgetekend in haar fotoalbum.

leeftijd t (jaar)	0	5	8	11	14	17
lengte l (cm)	....	....	....	....	....	....



1 Wat is de gemiddelde toename van haar lichaamslengte per jaar over het tijdsinterval [0, 17]?

....

....

2 Betekent dit dat Amber jaarlijks met zoveel centimeter gegroeid is? ....

3 Bereken de lengtetoename van Amber over de volgende tijdsintervallen van 3 jaar.

tijdsinterval Δt (jaar)	[5, 8]	[8, 11]	[11, 14]	[14, 17]
lengtetoename Δl (cm)	....	....	....	....

4 In welk tijdsinterval groeide Amber het snelst?

....

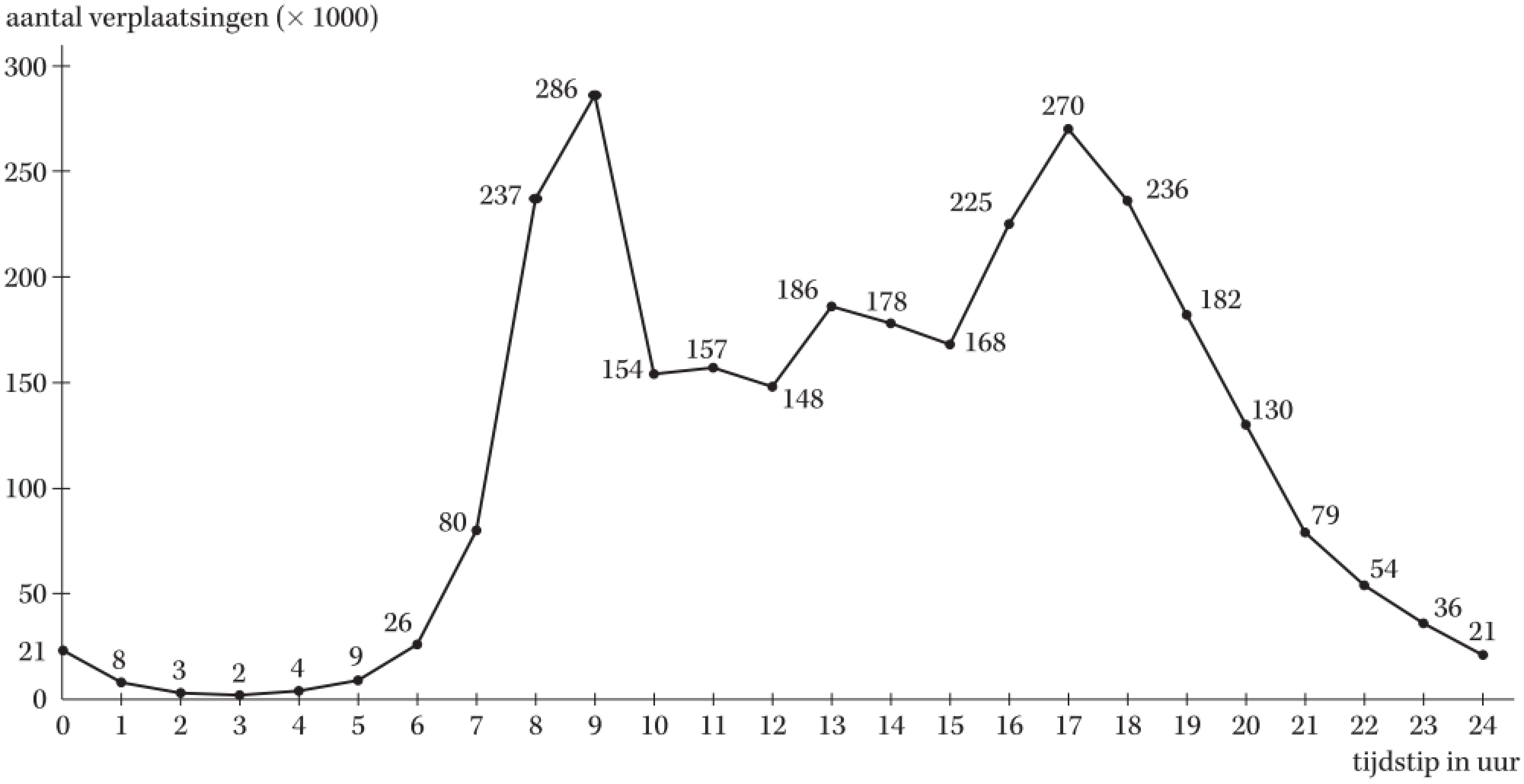
5 Wat is de gemiddelde lengtetoename per jaar over die periode?

....

....

6

Hoeveel verplaatsingen de inwoners van Vlaanderen maken op de Belgische wegen gedurende een werkdag, lezen we af op de grafiek.



De meeste van deze verplaatsingen gebeuren met de eigen wagen en veroorzaken files tijdens de ochtend- en de avondspits.

1 Wanneer is de verandering van het aantal verplaatsingen per uur het grootst?

....

2 Bereken deze verandering Δn.

....

....

3 Bereken de gemiddelde verandering $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ van het aantal verplaatsingen per uur

a tussen 6 en 9 uur.

....

....

b tussen 17 en 21 uur.

....

....

4 Wat is de betekenis van een positief en van een negatief differentiequotiënt?

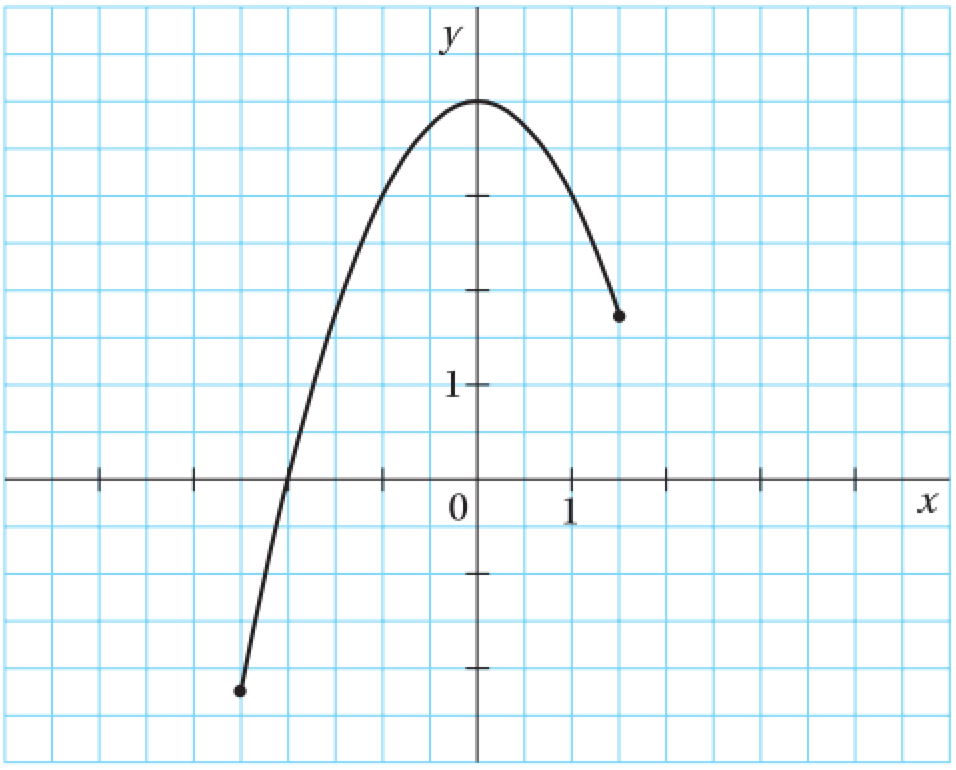
....

....

7

Bereken de gemiddelde helling en de gemiddelde hellingshoek α van de grafiek over het werkdomein van de functie. Rond α af op 1° en duid deze hoek aan op de figuur.

1 $f(x) = 4 - x^2$ met dom $f = [-2{,}5\,;\,1{,}5]$



gemiddelde helling

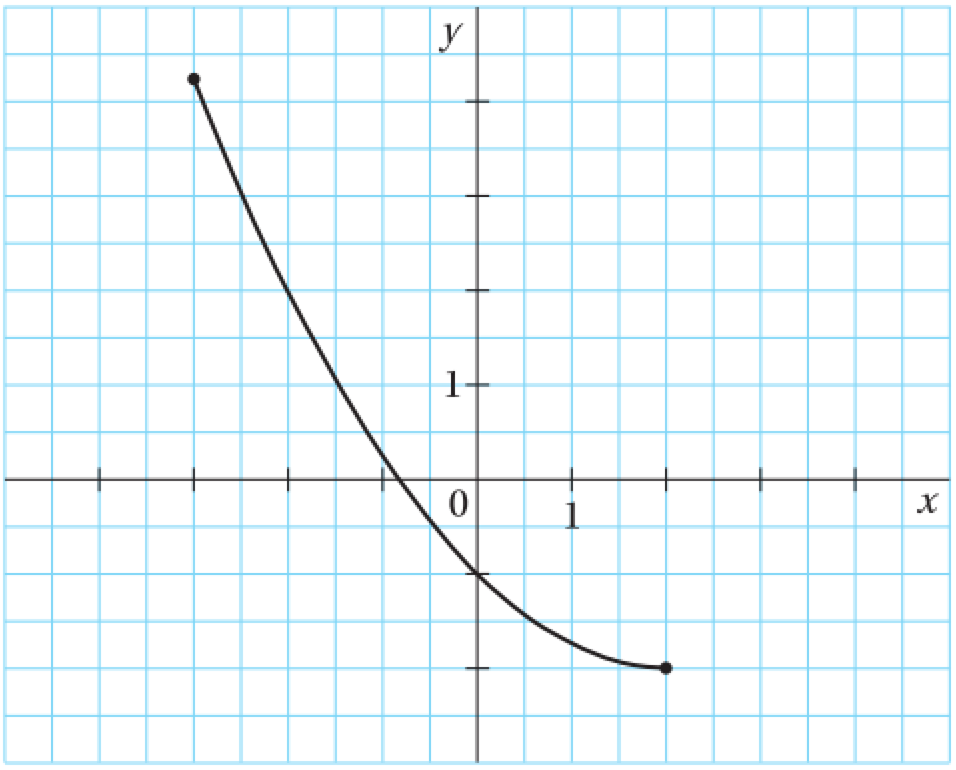
....

....

gemiddelde hellingshoek

....

2 $f(x) = 0{,}25x^2 - x - 1$ met dom $f = [-3, 2]$



gemiddelde helling

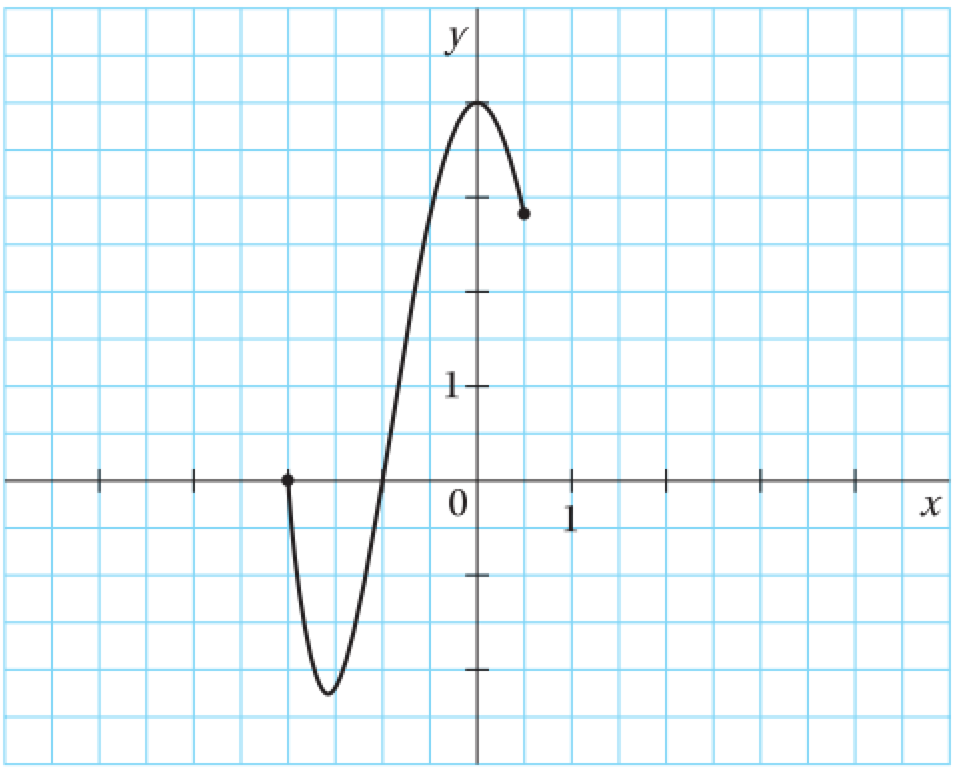
....

....

gemiddelde hellingshoek

....

3 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ met dom $f = [-2\,;\,0{,}5]$



gemiddelde helling

....

....

gemiddelde hellingshoek

....

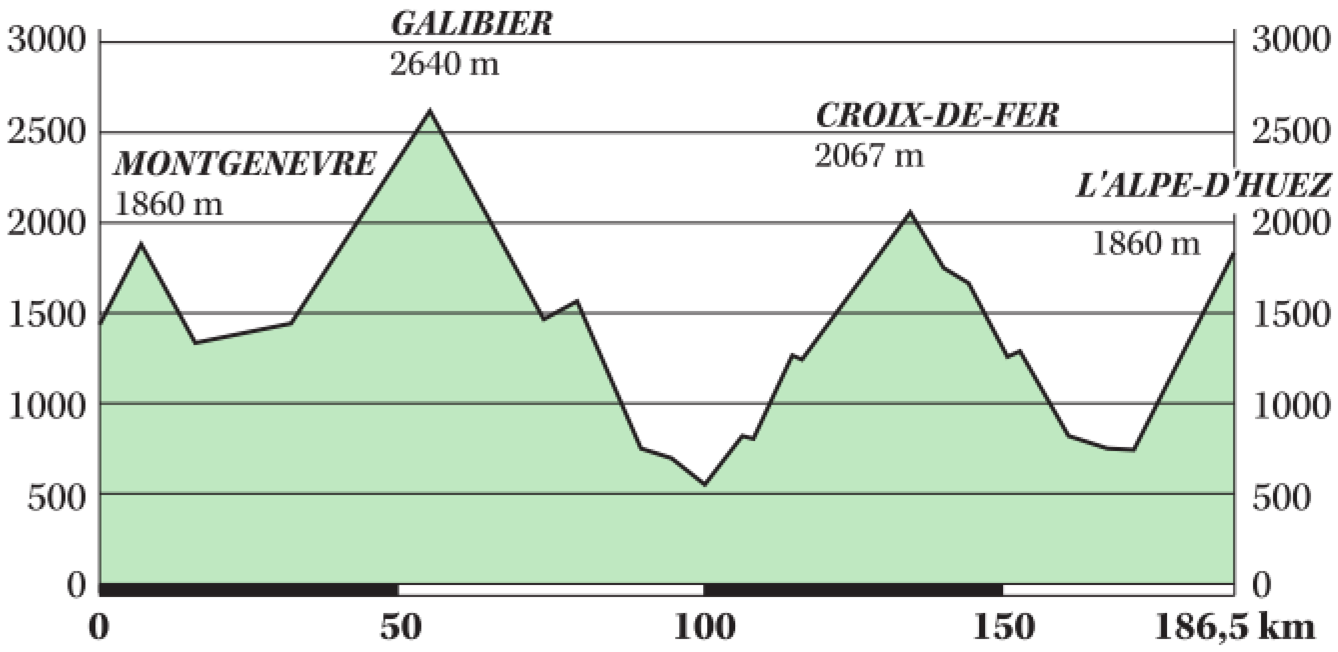
8

De tabel beschrijft de koninginnenrit naar l'Alpe-d'Huez in een Ronde van Frankrijk.

Afstand in km	SESTRIERE - L'ALPE-D'HUEZ		Hoogte in m
-	Sestriere		1350
0	Cesana Torinese		1354
	FRANKRIJK		
7,5	***Montgenèvre***	▲	1860
20	Briançon		1326
33,5	Le Monêtier		1495
55	***Galibier***	▲	2640
90	Saint-Michel-de-Maurienne		711
103	Saint-Jean-de-Maurienne		567
132	***Croix-de-Fer***	▲	2067
164	Rochetaillée		775
170,5	Bourg-d'Oisans		720
186,5	***L'Alpe-d'Huez***	▲	1860



Als we dit ritverloop in grafiek brengen, dan wordt in één oogopslag de moeilijkheidsgraad van deze bergrit duidelijk.



1 Bereken de gemiddelde helling van de beklimming van Saint-Jean-de-Maurienne naar Croix-de-Fer en van Bourg-d'Oisans naar l'Alpe-d'Huez.

....

....

....

....

....

....

2 Bereken het gemiddelde hellingspercentage van de afdaling van de Galibier tot in Saint-Michel-de-Maurienne.

....

....

9

Signal de Botrange is het hoogste punt van België. Deze toeristische trekpleister in de Hoge Venen ligt 694 meter boven de zeespiegel. In vogelvlucht is dit hoge plateau 225 kilometer verwijderd van de zeepier te Oostende.





1 Maak een schets van de profieldoorsnede van ons land vanaf Oostende tot het plateau van de Botrange.

2 Bereken de gemiddelde helling van deze profieldoorsnede.

....

....

3 Bereken de bijbehorende hellingshoek α in graden, minuten en seconden.

....

....

....

....

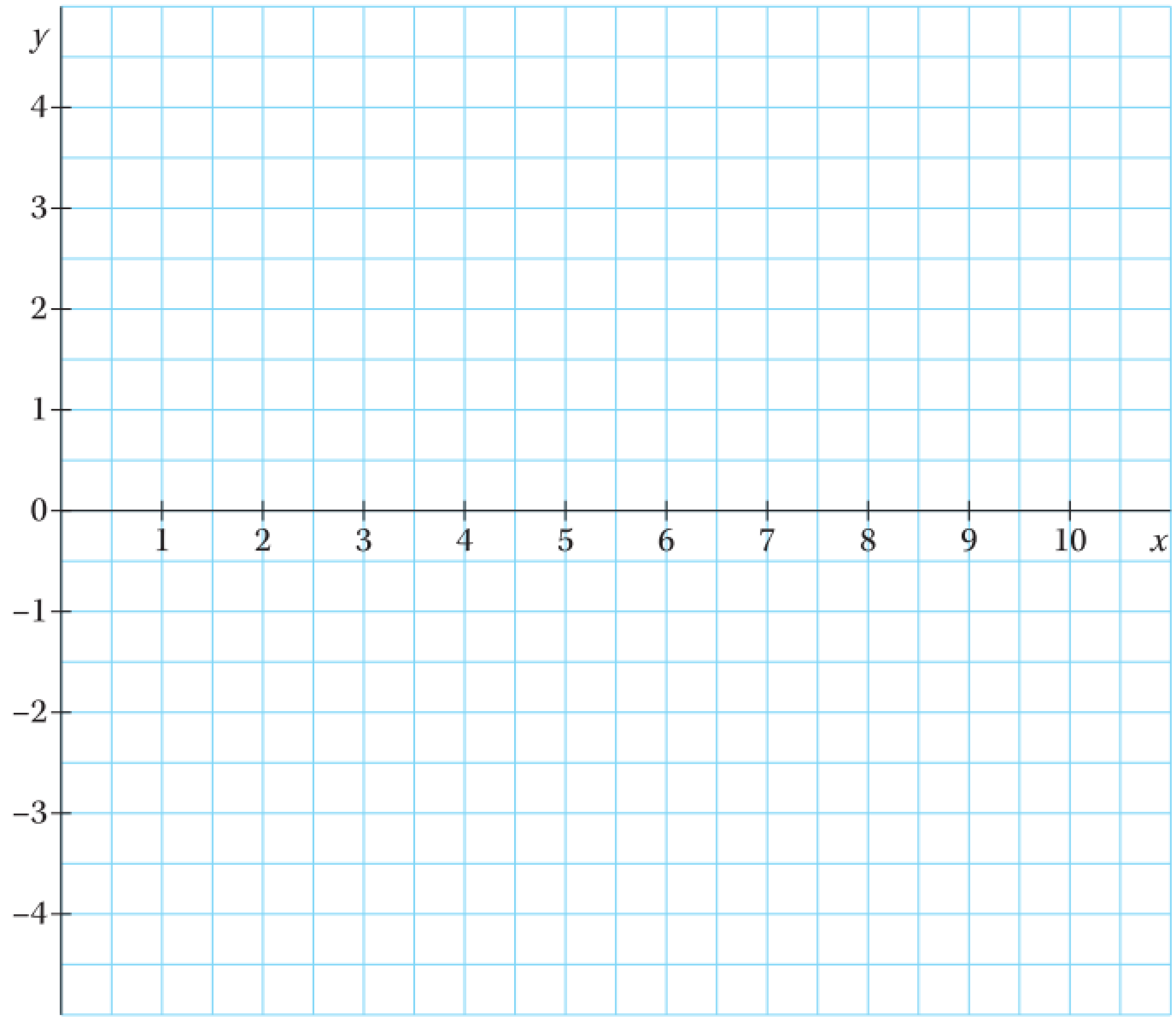
10

De grafiek van een functie f begint in het punt (0, −4) en heeft de volgende gemiddelde hellingen over de gegeven intervallen.

interval	[0, 3]	[3, 5]	[5, 9]	[9, 10]
gemiddelde helling	2	-2,5	0	2

1 Duid in het assenstelsel 5 punten van de grafiek aan.

2 Schets een grafiek van f als we weten dat de grafiek de x-as tweemaal snijdt, een maximum heeft voor $x = 2$ en een minimum voor $x = 7$.



11

Het viaduct van Millau in Frankrijk is de hoogste brug van de wereld. De brug is 2460 meter lang, ligt op 270 meter boven de rivier de Tarn en verbindt Clermont-Ferrand met Béziers.



Deze brug ligt niet mooi horizontaal maar stijgt in de richting van Béziers met een hellingspercentage van 3,025 %. Wat is het hoogteverschil tussen Clermont-Ferrand en Béziers? Maak eerst een schets.

Differentiequotiënten berekenen

We berekenen het differentiequotiënt van $f(x) = 0{,}25x^2$ over het interval [2, 5].

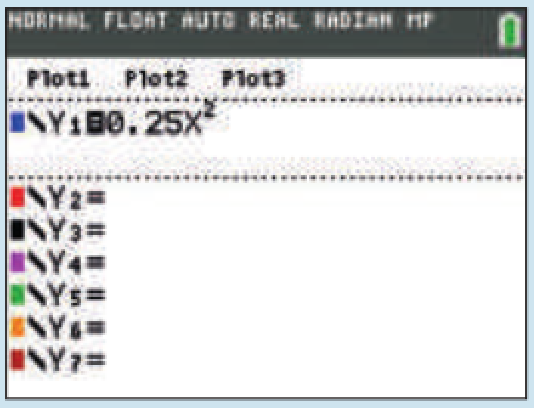
TEXAS INSTRUMENTS

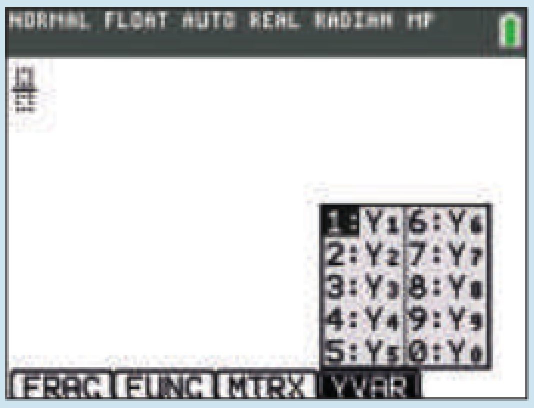
In het Y=-scherm voeren we het voorschrift $f(x) = 0{,}25x^2$ in.

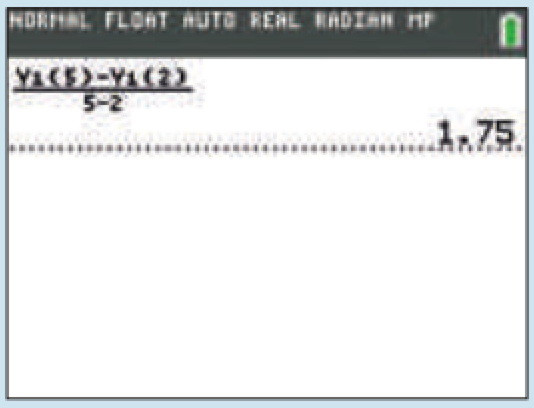
- [Y=] 0,25x^2

In het rekenscherm berekenen we het differentiequotiënt $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$.

- [2ND] [QUIT] [ALPHA] [F1] [1: n/d] [ALPHA] [F4] [1: Y1] [(] 5 [)] [–] [ALPHA] [F4] [1: Y1] [(] 2 [)] [▼] 5 [–] 2 [ENTER]







Het differentiequotiënt over het interval [2, 5] is 1,75.

CASIO

In het menu GRAPH voeren we het voorschrift $f(x) = 0{,}25x^2$ in.

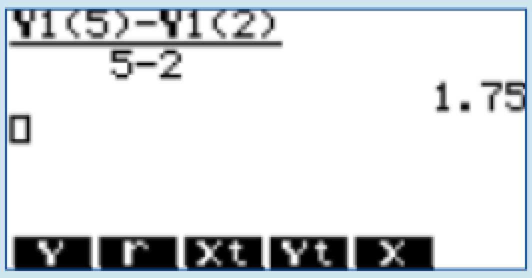
- [MENU] [3: GRAPH] $0{,}25x^2$ [EXE]

In het rekenscherm berekenen we het differentiequotiënt $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$.

- [MENU] [1: RUN·MAT] [▤] [VARS] [F4: GRPH] [F1: Y] 1 [(] 5 [)] [−] [VARS] [F4: GRPH] [F1: Y] 1 [(] 2 [)] [▼] 5 [−] 2 [EXE]







Het differentiequotiënt over het interval [2, 5] is 1,75.

12

Bereken met ICT de differentiequotiënten van de functie over de gegeven intervallen.

1 $f(x) = -0{,}1x^2$

interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[1, 4]	....
[4, 7]	....

2 $f(x) = 1{,}5x^2 - x$

interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[0, 5]	....
[5, 10]	....

3 $f(x) = 0{,}01x^3$

interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[1, 3]	....
[3, 5]	....

4 $f(x) = 0{,}1x^3 + x^2$

interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[1, 11]	....
[11, 21]	....

5 $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

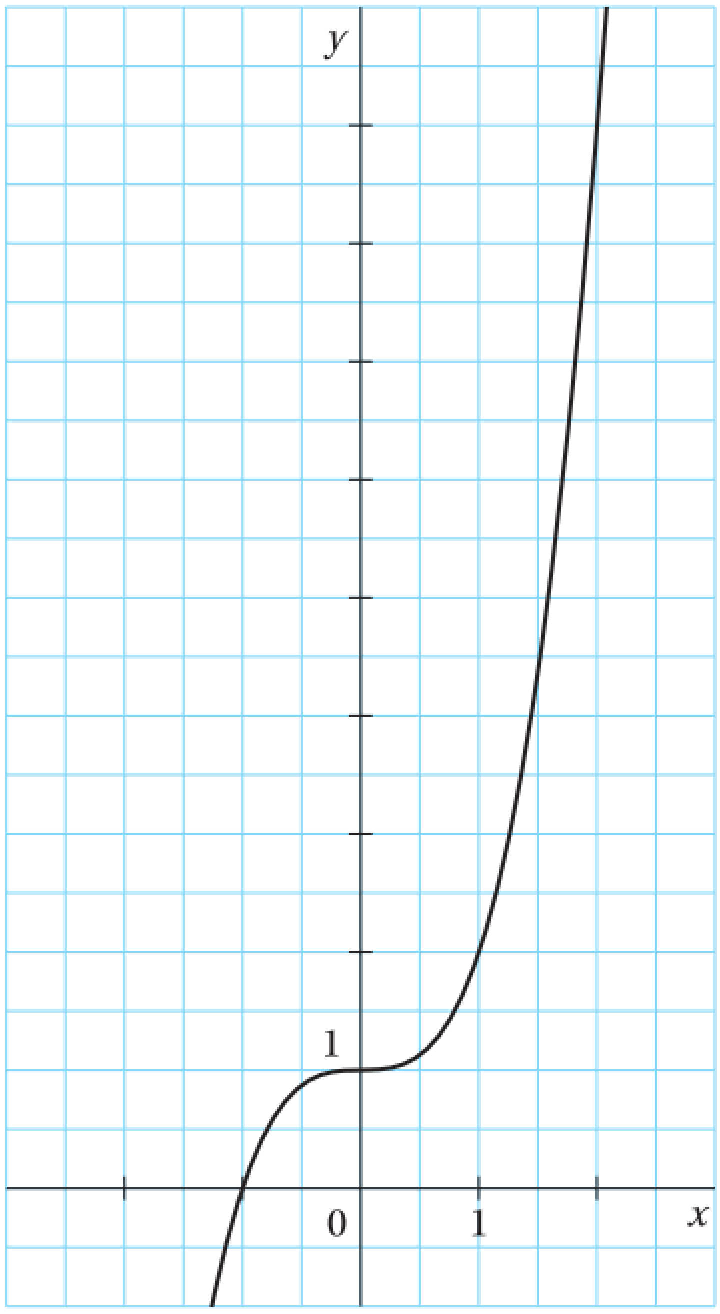
interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[2, 5]	....
[5, 8]	....

6 $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

interval	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
[0, 10]	....
[10, 20]	....

13

Bereken met ICT de gemiddelde helling en de gemiddelde hellingshoek van de grafiek van de functie $f(x) = x^3 + 1$ in de gegeven intervallen met linkergrenswaarde -1. Rond de hellingshoek af op 1°.



interval	gemiddelde helling	gemiddelde hellingshoek
$[-1 ; -0{,}5]$	....	....
$[-1, 0]$	....	....
$[-1 ; 0{,}5]$	....	....
$[-1, 1]$	....	....
$[-1 ; 1{,}5]$	....	....
$[-1, 2]$	....	....

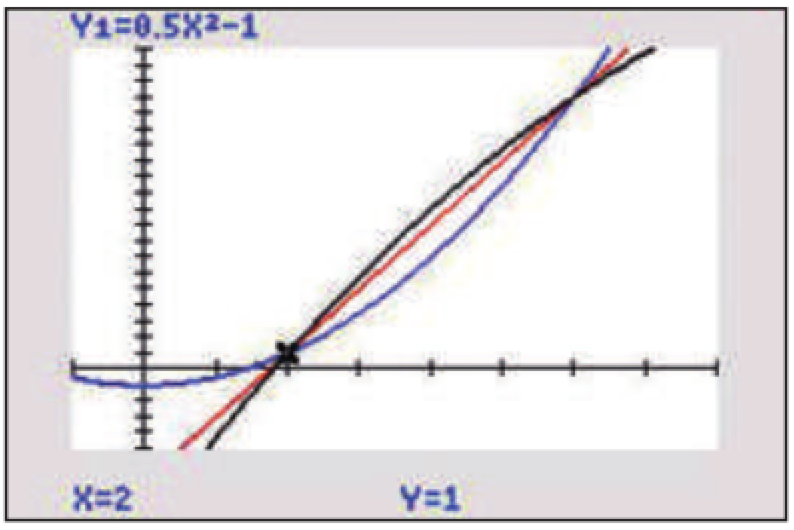
In welk interval is de gemiddelde hellingshoek het kleinst?

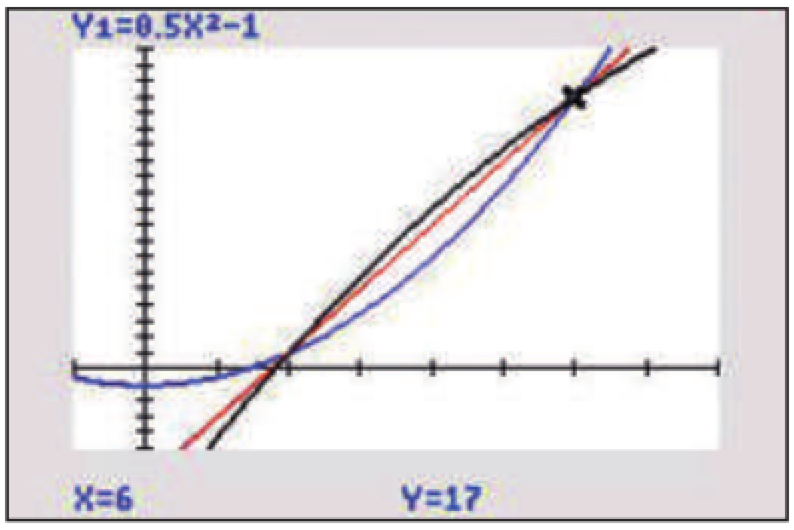
....

Duid deze hellingshoek aan op de figuur.

14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$, $g(x) = 4x - 7$ en $h(x) = -0{,}25x^2 + 6x - 10$.





1 De grafieken van de functies f, g en h gaan door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 17)$.
Bereken het differentiequotiënt van deze functies over het interval [2, 6].

....

2 Bereken het differentiequotiënt van elke functie over de gegeven intervallen.

interval	$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta h(x)}{\Delta x}$
[2, 4]	....	....	....
[4, 6]	....	....	....

3 Van welke functie zijn de differentiequotiënten gelijk aan het differentiequotiënt berekend in vraag 1. Waarom?

....

....

....

4 Van welke functie en over welk interval is het differentiequotiënt het grootst?

....

5 Van welke functie en over welk interval is het differentiequotiënt het kleinst?

....

Gemiddelde snelheid

15 Instap

Traditioneel wordt een snelheidscontrole uitgevoerd door het plaatsen van radars of met laserguns. Deze technieken meten de snelheid van een voertuig op één enkele plaats en nemen een foto van elk voertuig dat sneller beweegt dan een ingestelde limiet.
Trajectcontrole werkt op een andere manier: elk voertuig wordt aan het begin en aan het einde van het traject gefotografeerd met een digitale camera. Een computeranalyse van de foto identificeert elk voertuig en is in staat om hetzelfde voertuig bij de tweede post te herkennen. De afstand tussen de posten wordt gedeeld door het tijdsverschil voor elk voertuig, waardoor de gemiddelde snelheid over het traject bekend is. Wanneer een voertuig de toegestane snelheid overschrijdt, wordt het beeld van het voertuig onmiddellijk naar een centrale verstuurd waar een bekeuring wordt opgesteld.



De meetpunten van een trajectcontrole op een autosnelweg liggen 1 kilometer uit elkaar.

1 Hoelang zal een voertuig dat aan de maximum toegelaten snelheid van 120 km/h rijdt, erover doen om het traject af te leggen?

....

2 Welke voertuigen hebben te snel gereden? Vink het juiste antwoord aan.

Alle voertuigen die er langer over doen. ☐

Alle voertuigen die er minder lang over doen. ☐

In juni 2012 is het eerste trajectcontrolesysteem in Vlaanderen in gebruik genomen.
Het systeem staat op het viaduct van de E17 in Gentbrugge richting Kortrijk over een afstand van 1,9 kilometer.

3 Wat is de gemiddelde snelheid van een voertuig dat deze afstand in 50 seconden aflegt?

....

....

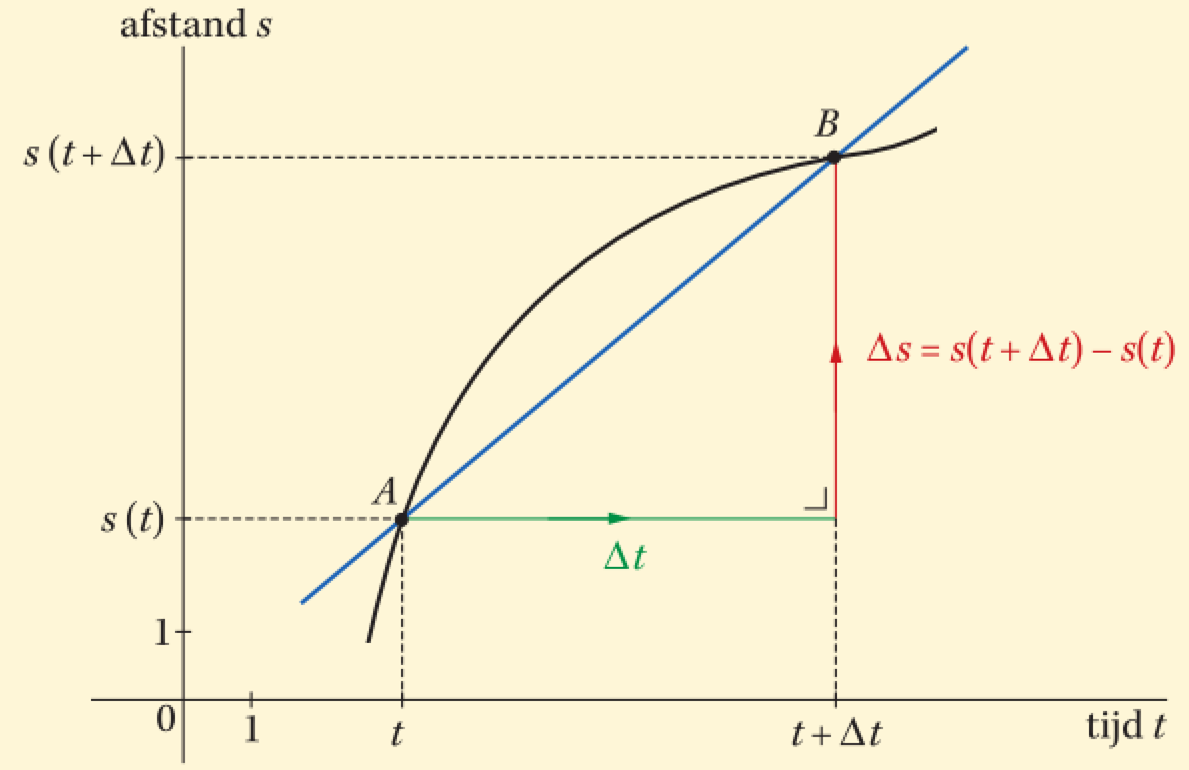
4 Als de maximum toegelaten snelheid 90 km/h is, hoelang moet een voertuig dan minstens over deze afstand doen om niet beboet te worden?

....

....

Gemiddelde snelheid over een tijdsinterval

De tijd-afstandgrafiek laat de verandering van de afstand s zien over het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$.



Met het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ berekenen we de gemiddelde verandering of de gemiddelde helling over het interval $[t, t + \Delta t]$.

In een tijd-afstandgrafiek spreken we van de **gemiddelde snelheid** over het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$. Stellen we de gemiddelde snelheid voor met het symbool v_{gem}, dan is de formule voor de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$:

$$v_{gem} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Met deze formule voor de gemiddelde snelheid berekenen we ook de richtingscoëfficiënt van de rechte AB. Dit betekent: hoe steiler de rechte AB, hoe hoger de gemiddelde snelheid.

16

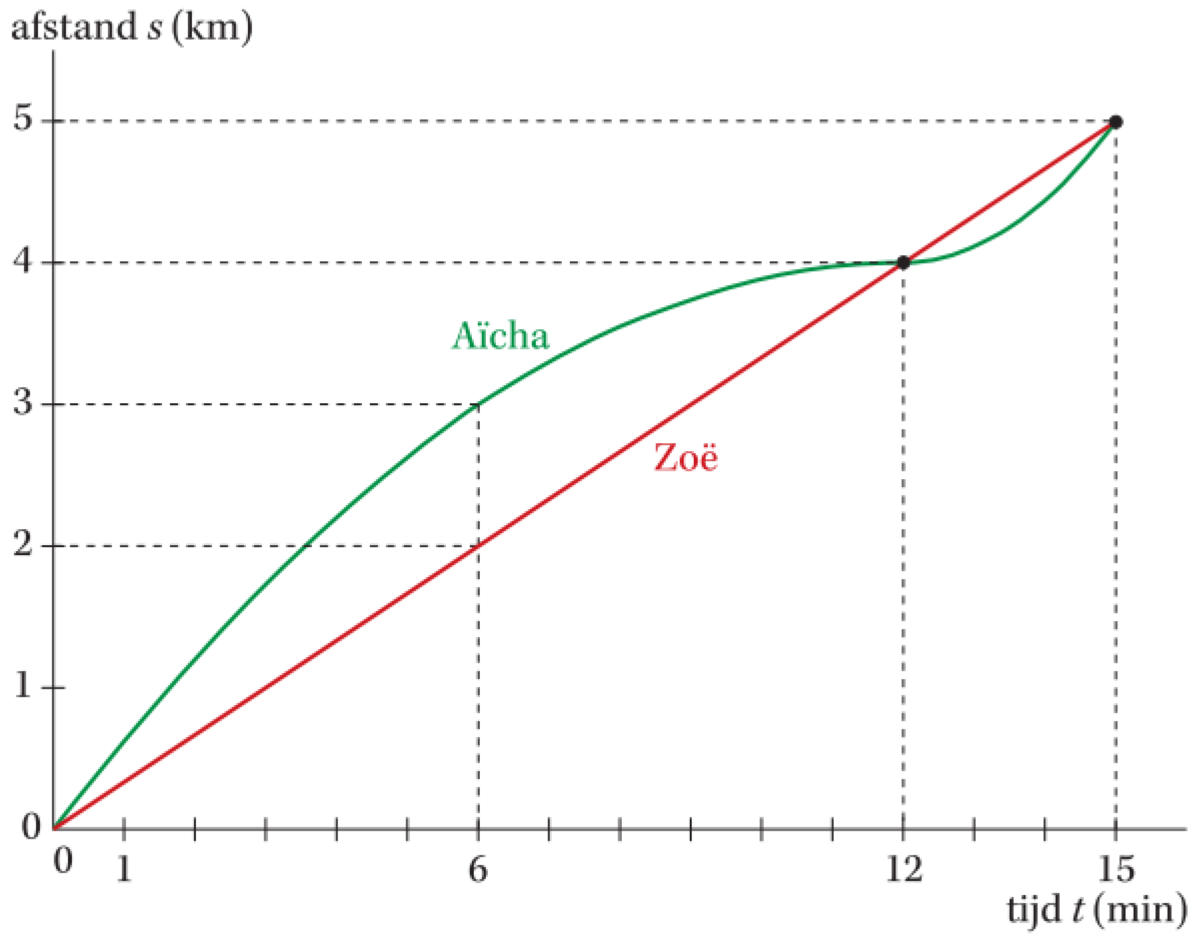
De afstand Brussel-Parijs is 294 kilometer. De Thalys die om 7.05 uur vertrekt, komt in Parijs aan om 8.27 uur. Hoe groot is zijn gemiddelde snelheid?

....

....

17

Zoë en Aïcha fietsen elke morgen naar school. Uit de tijd-afstandgrafiek kunnen we afleiden hoe snel ze rijden.



1 Bereken de gemiddelde snelheid in km/h van beide fietsers over de ganse rit.

....

....

....

2 Bereken de gemiddelde snelheid van Zoë over elk gegeven tijdsinterval.

[0, 6] ....

[6, 12] ....

[12, 15] ....

Wat stellen we vast? ....

3 Bereken de gemiddelde snelheid van Aïcha over elk gegeven tijdsinterval.

[0, 6] ....

[6, 12] ....

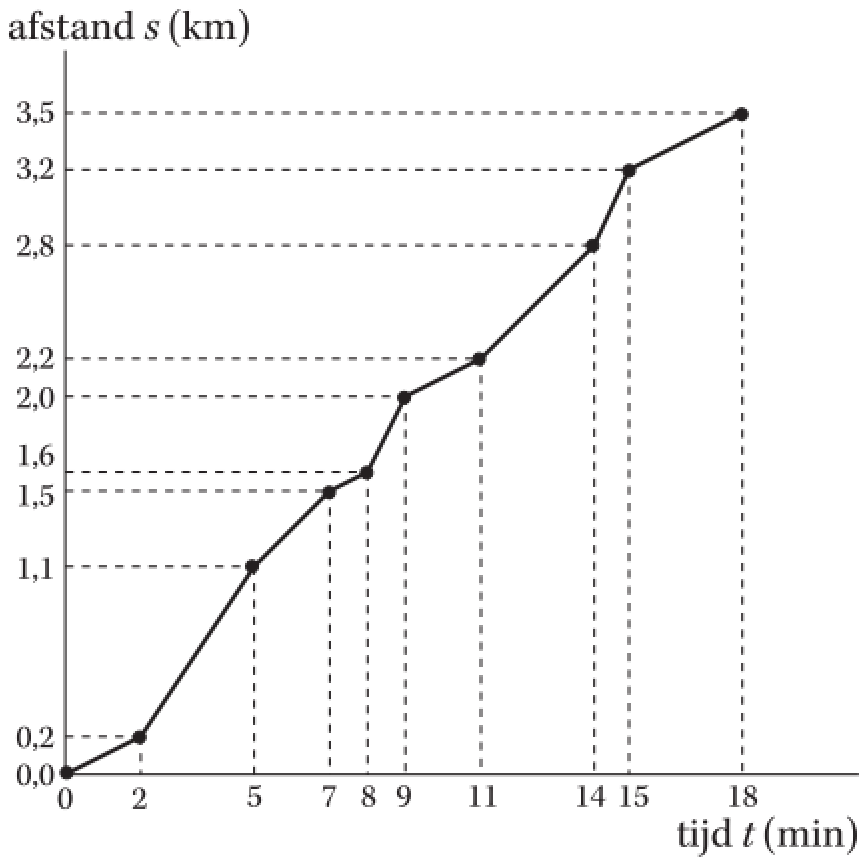
[12, 15] ....

In welk tijdsinterval rijdt Aïcha gemiddeld sneller dan Zoë? ....

Hoe zien we dit op de grafiek? ....

18

Bram volgt nauwgezet een opgelegd trainingsschema. De grafiek laat zien hoe hij loopt en waar hij zich op elk tijdstip bevindt.





1 Bereken over elk aangeduid tijdsinterval de gemiddelde snelheid in km/h.

[0, 2] ....

[2, 5] ....

[5, 7] ....

[7, 8] ....

[8, 9] ....

[9, 11] ....

[11, 14] ....

[14, 15] ....

[15, 18] ....

2 Geef een opsomming van de opeenvolgende loopstijlen van Bram tijdens deze intervaltraining. Maak een keuze uit: wandelen, vlot lopen, snel lopen en sprinten.

....

....

19

De hoogste wolkenkrabber ter wereld is momenteel de Burj Khalifa in de stad Dubaï in de Verenigde Arabische Emiraten. Iemand gooit bij wijze van experiment een metalen kogel van de wolkenkrabber naar beneden. De hoogte van de kogel kan op elk ogenblik berekend worden met $h(t) = 828 - 4{,}9t^2$ waarin h de hoogte in meter voorstelt en t de tijd in seconden.



1 Hoe hoog is dit gebouw?

....

....

2 Wat is de valtijd van de kogel?

....

....

....

....

....

....

3 Bereken de gemiddelde snelheid van de kogel in km/h.

....

....

....

4 Bereken de gemiddelde valsnelheid van de kogel in m/s over de gegeven tijdsintervallen.

[0, 4] ....

[4, 8] ....

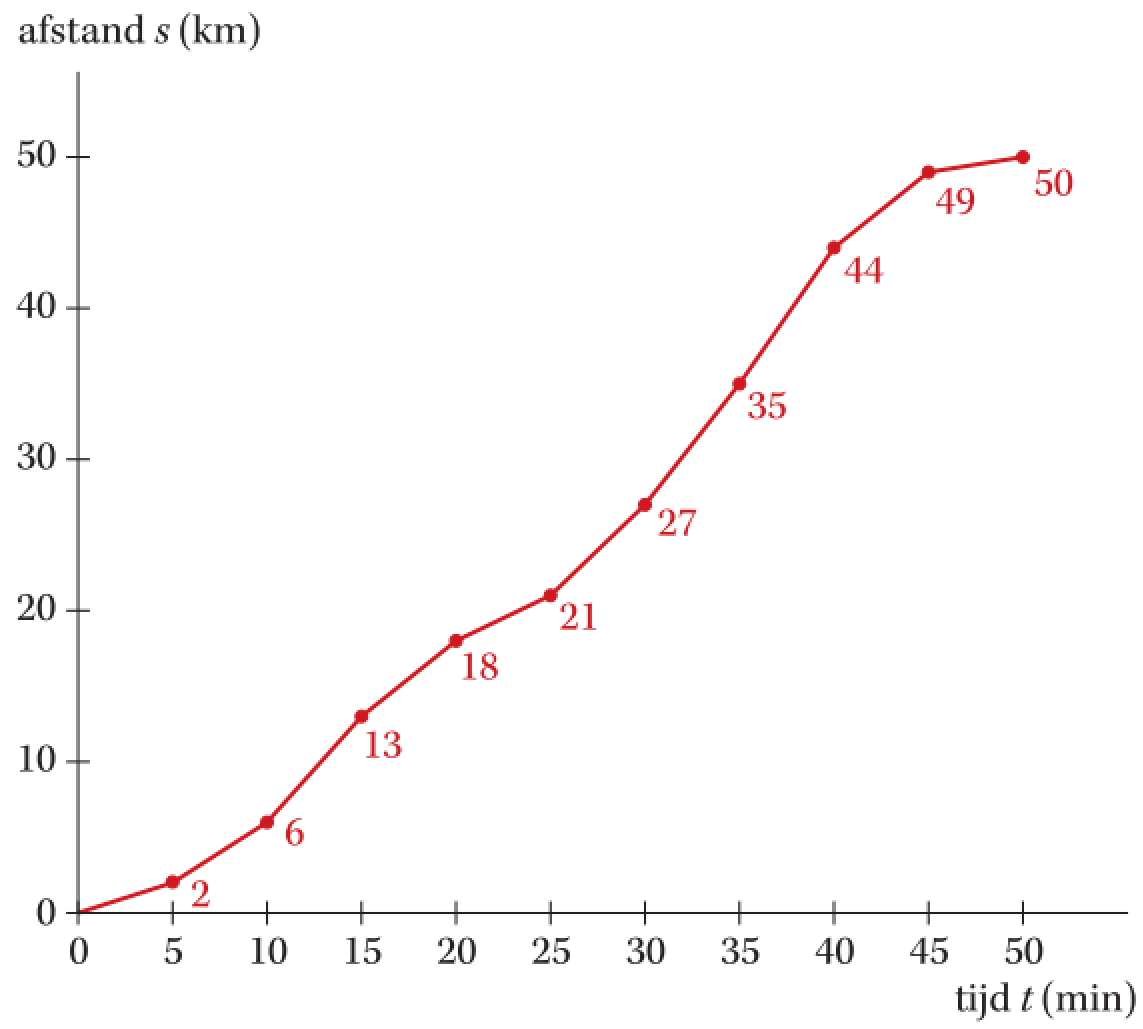
[8, 12] ....

5 Hoe verandert de snelheid van de kogel over deze tijdsintervallen?

....

20

Gegeven is de tijd-afstandgrafiek.



1 Over welk van de aangeduide tijdsintervallen met een stapgrootte van 5 minuten is de gemiddelde snelheid het grootst? Bereken de grootste gemiddelde snelheid.

....

....

....

....

....

2 Over welk interval met stapgrootte 5 is de gemiddelde snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid bereikt over het ganse traject van 50 km?

....

....

....

....

....

....

....

3 Over welke intervallen $[0, t]$ zijn de gemiddelde snelheden gelijk? Vul de tabel in en bepaal t.

tijdsinterval $[0, t]$	$[0, 5]$	$[0, 10]$	$[0, 15]$	$[0, 20]$	$[0, 25]$
v_{gem} (km/h)	....	....	....	....	....

tijdsinterval $[0, t]$	$[0, 30]$	$[0, 35]$	$[0, 40]$	$[0, 45]$	$[0, 50]$
v_{gem} (km/h)	....	....	....	....	....

....

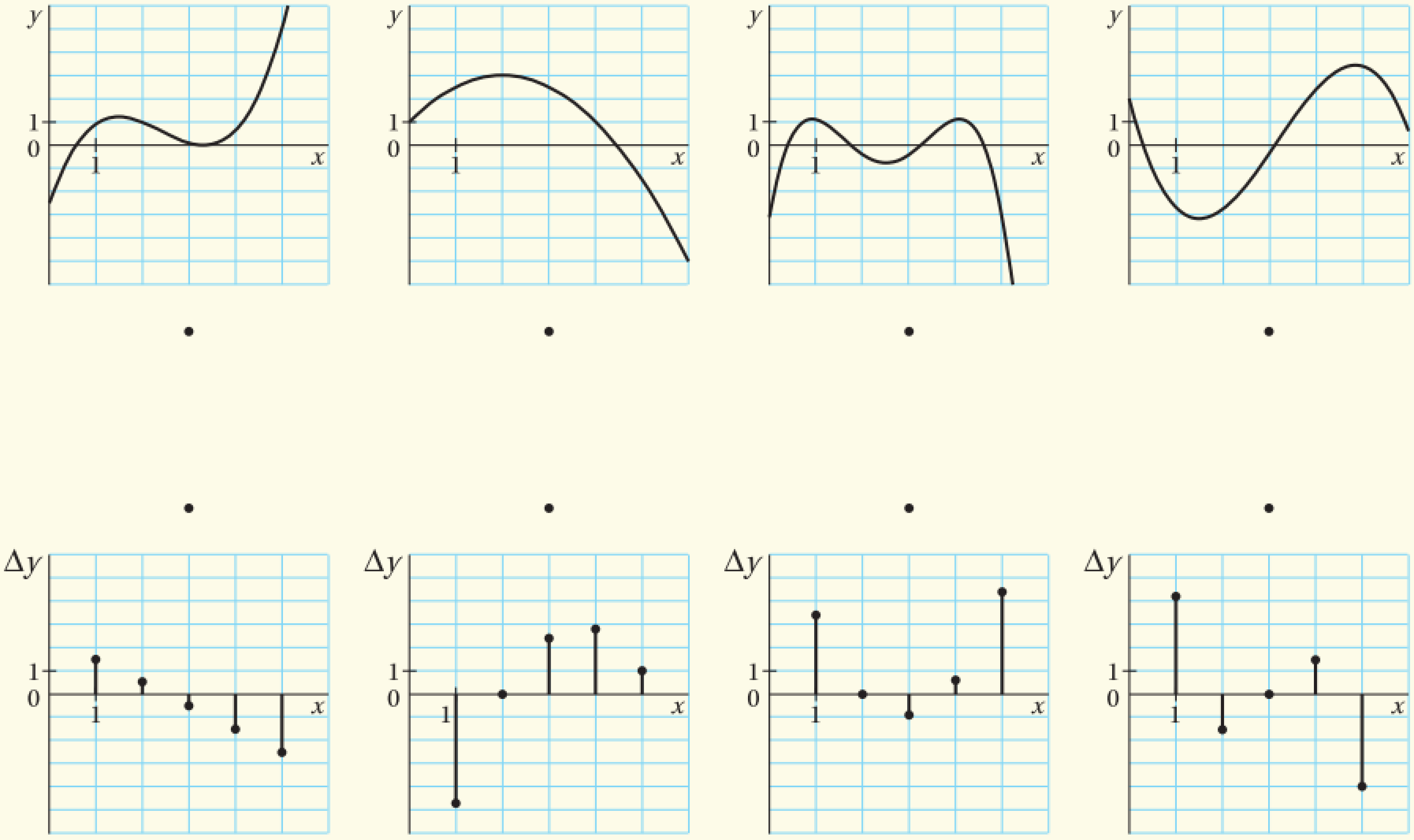
....

....

....

Uitdagingen

1 Verbind elke grafiek met het bijbehorende toenamediagram.

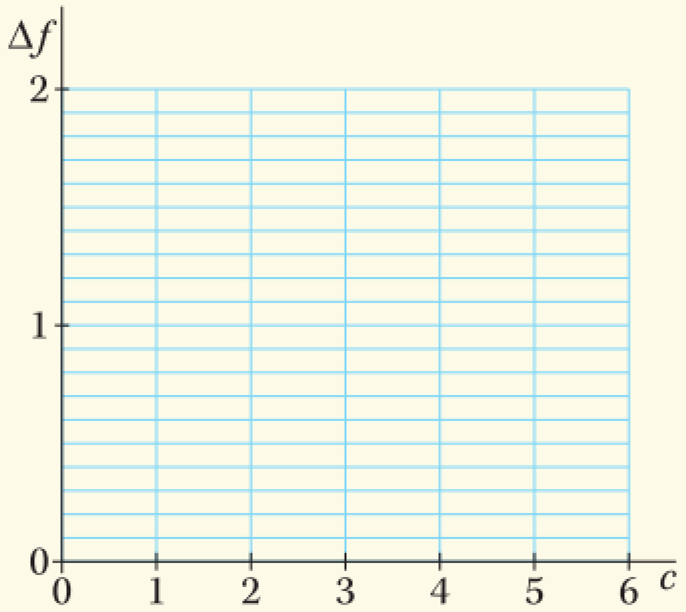


zie pagina 326

2 Teken bij de formule een toenamediagram met stapgrootte 1 over het interval [0, 6].

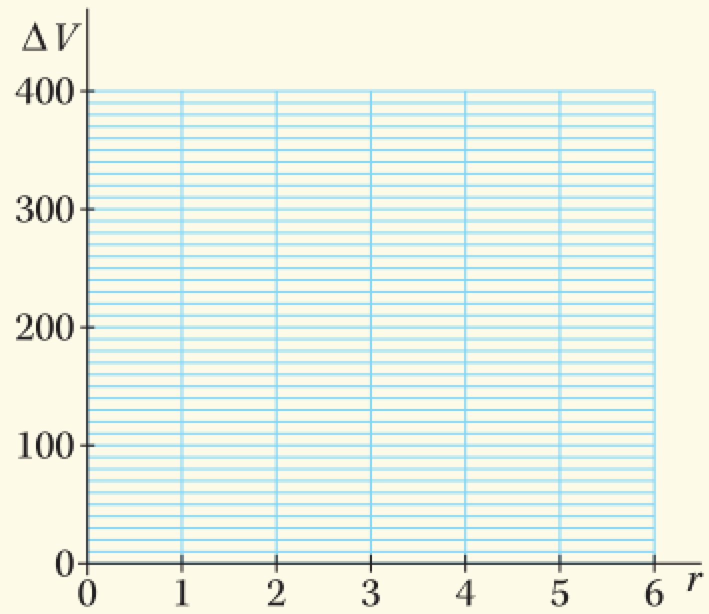
1 $f = 1{,}8c + 32$

f: temperatuur in graden Fahrenheit
c: temperatuur in graden Celcius



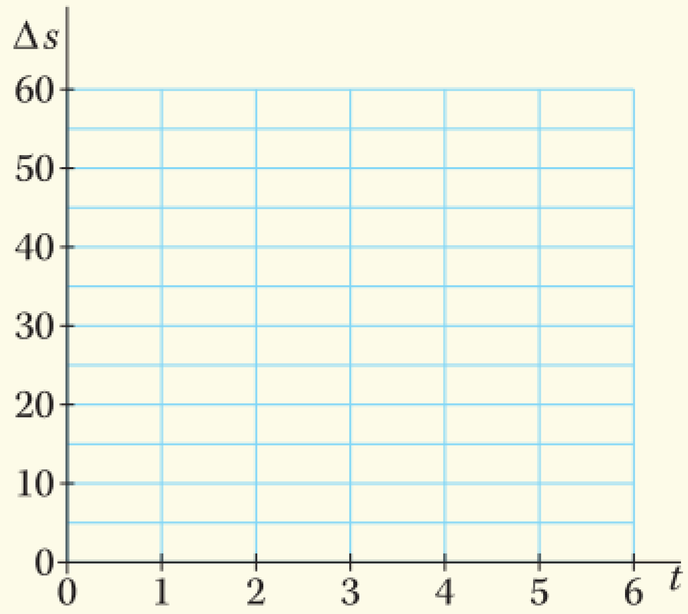
2 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

V: volume bol in cm^3
r: straal bol in cm



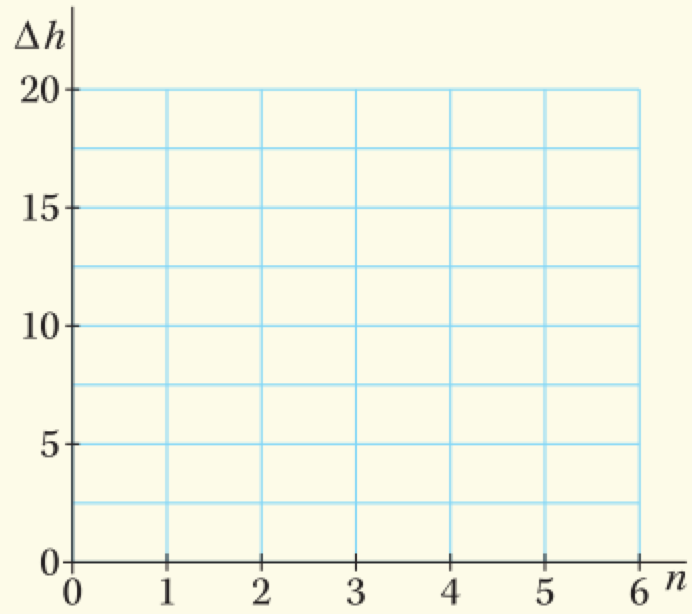
3 $s = 5t^2$

s: afgelegde weg in meter
t: tijd in seconden



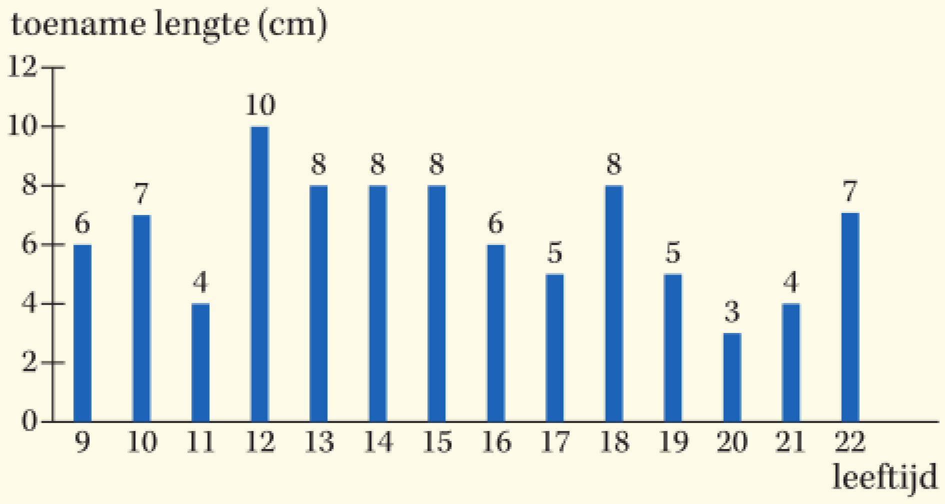
4 $h = 17{,}5n$

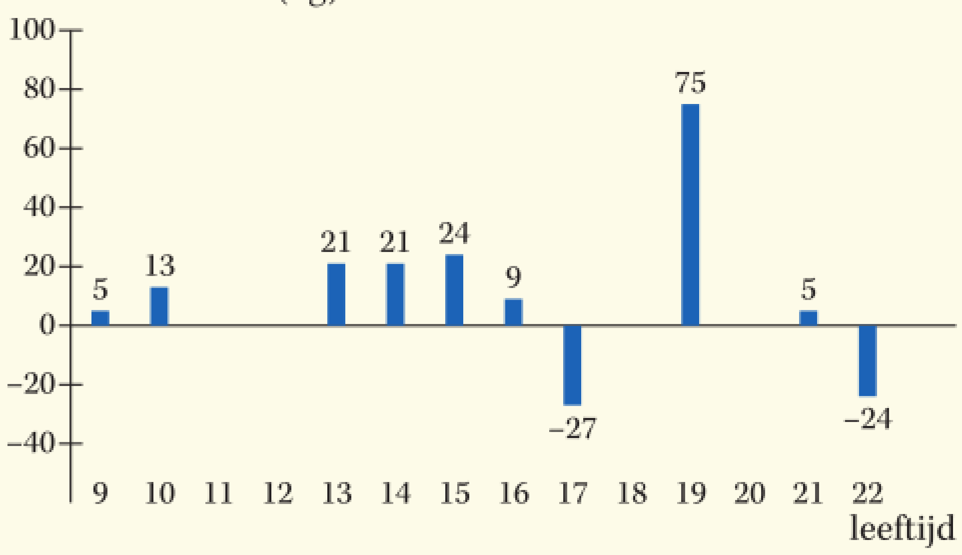
h: hoogte van een trede in cm
n: aantal treden van een trap

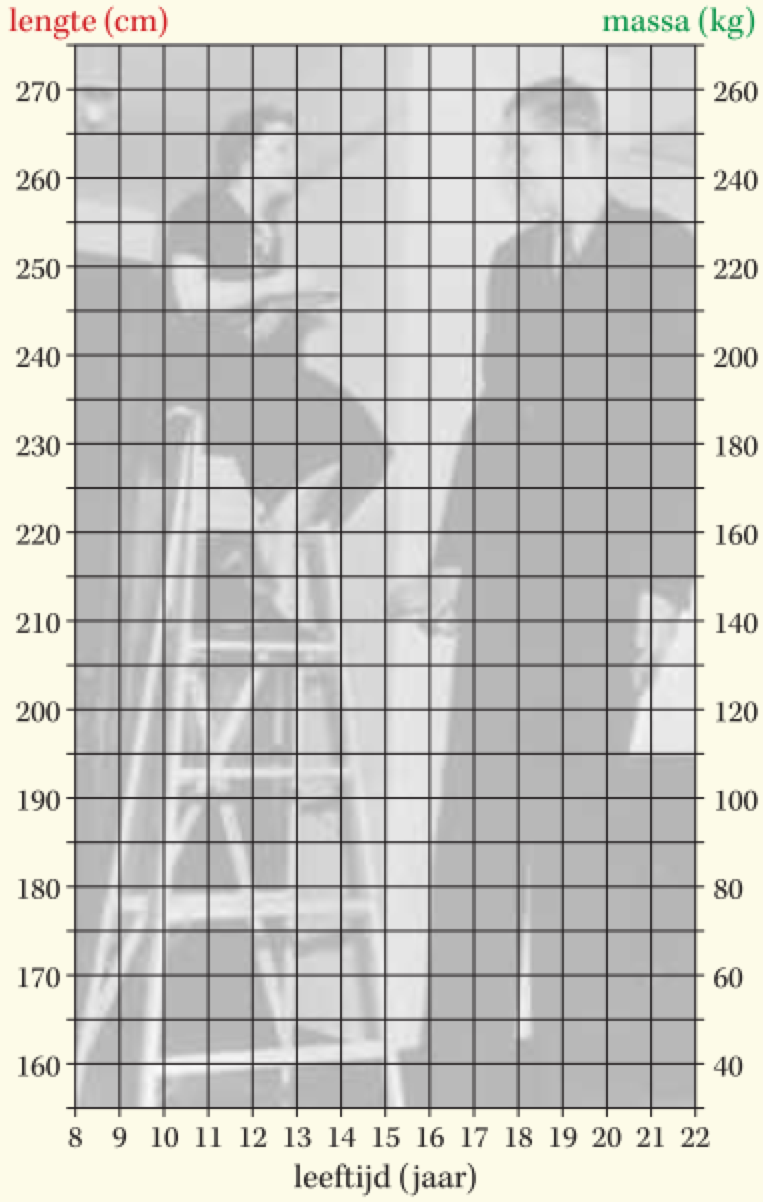


zie pagina 326

3 De grootste man ter wereld was Robert Pershing Wadlow, geboren in 1918. Op achtjarige leeftijd was hij 1,83 m groot en woog hij 77 kg. De toename van zijn lengte en massa lezen we af in de toenamediagrammen.







1 Teken de bijbehorende grafieken waarop we de lengte en de massa van Robert kunnen aflezen.

2 Hoe groot was Robert op zijn 22e verjaardag? Hoeveel woog hij toen?

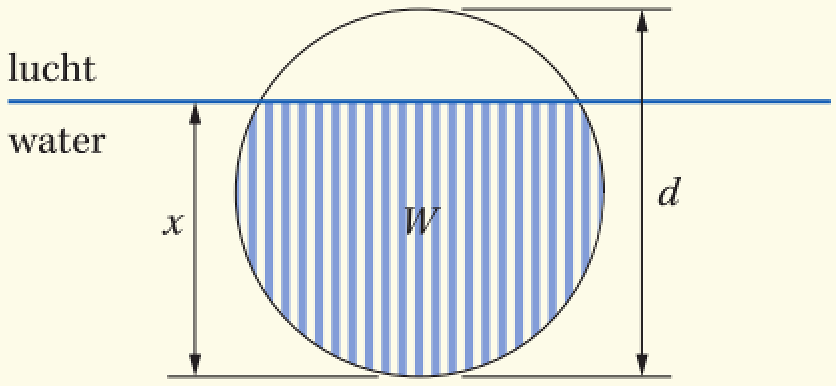
3 In welk jaar groeide hij het snelst?

4 Robert kreeg voor hij twintig werd een zware griep en een infectie aan zijn voet. Hierdoor viel hij sterk af. In welk jaar was dit?

5 Hoeveel woog hij toen en wat was zijn lichaamslengte?

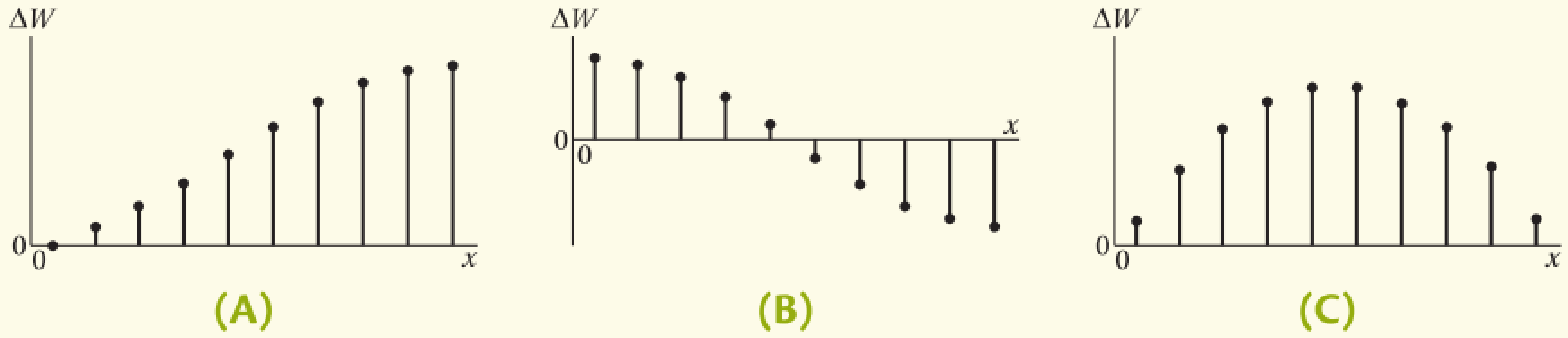
zie pagina 327

4 Het is niet zo makkelijk om een bal onder water te duwen en zeker niet om hem daar te houden. Laten we de bal onder water los, dan schiet hij omhoog en springt soms een heel eind boven het wateroppervlak. We duwen langzaam een bal, met diameter d, een afstand x onder het wateroppervlak.





Welk toenamediagram behoort bij de toename van het volume W van de bal, dat onder water zit?



zie pagina 328

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = 15x + 5$ en $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Bepaal met ICT een interval met stapgrootte $\Delta x = 2$ waarover de differentiequotiënten van de twee functies gelijk zijn.

zie pagina 328

6 Tot voor het jaar 1962 waren binnenschippers, omwille van de talrijke sluizen, ongeveer twee dagen onderweg om via het kanaal Brussel-Charleroi hun bestemming te bereiken. Om dit traject met een hoogteverschil van 68 m te overbruggen, bouwde men te Ronquières een hellend vlak waarop twee reusachtige waterbakken over rails omhoog en omlaag rijden. Sinds 1968 kunnen schepen met een laadvermogen tot 1350 ton in de tijd van drie kwartier de helling nemen in één van deze waterbakken. Het hellend vlak van sluisdeur tot sluisdeur meet 1432 m.



1 Maak een schets van de profieldoorsnede van het hellend vlak.

2 Bereken de horizontale afstand die door het hellend vlak overbrugd wordt.

3 Bepaal de helling en de hellingshoek van het hellend vlak van Ronquières.

zie pagina 329

7 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^2 - 0{,}75x + 1{,}5$.

1 Bereken de gemiddelde helling van de grafiek over de intervallen $[-5, -3]$, $[-3, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$ en $[3, 5]$.

2 Bepaal drie intervallen waarover de gemiddelde helling nul is.

zie pagina 330

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = -x^2 + 2$.

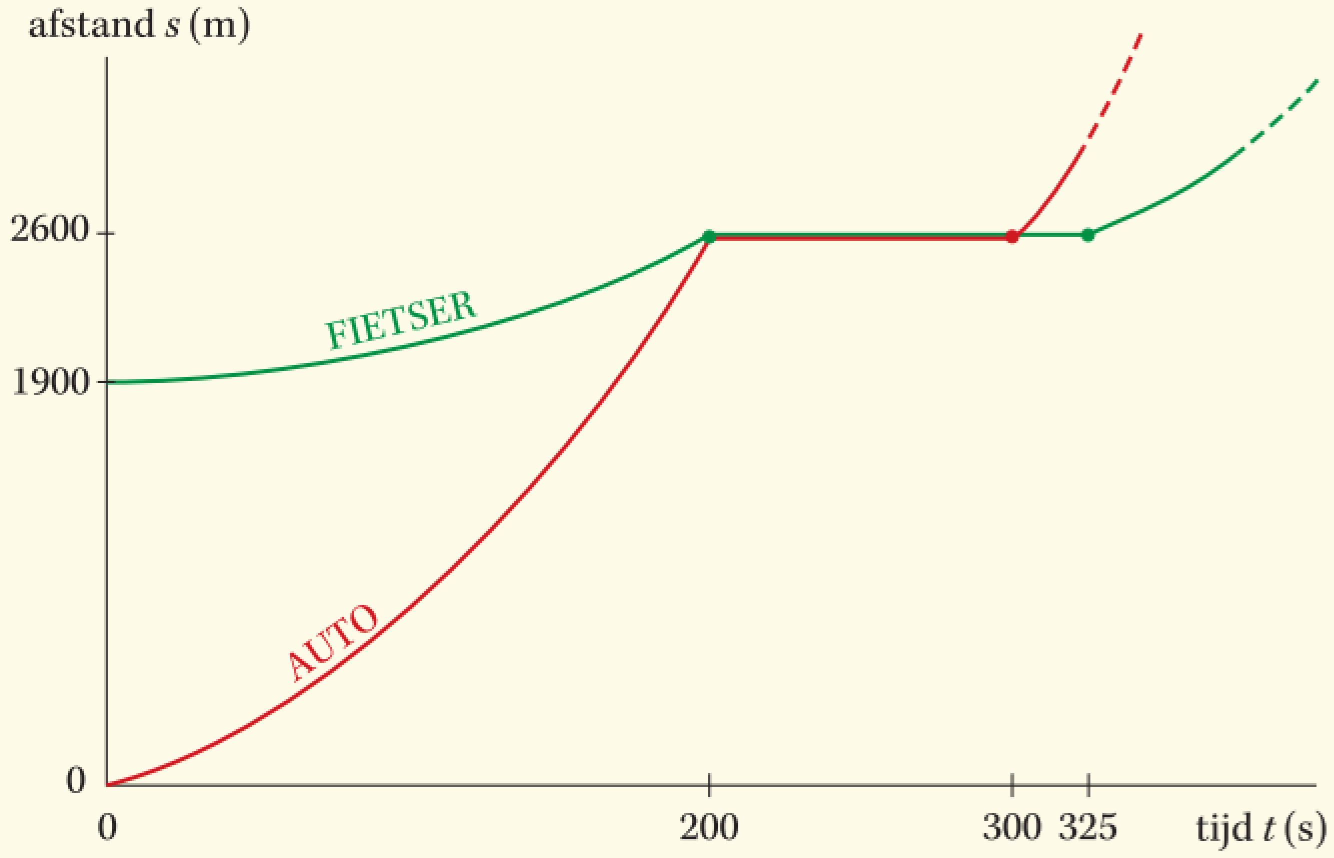
1 Bepaal de helling van de rechte die door de snijpunten A en B van de grafieken van de functies f en g gaat.

2 Bereken de hellingshoek van deze rechte.

3 Bepaal een vergelijking van de rechte AB.

zie pagina 330

9 Een fietser en een automobilist rijden langs dezelfde weg. De fietser wordt door de chauffeur aangereden. Het hele gebeuren is op de grafiek vastgelegd.



1 Wanneer wordt de fietser aangereden? Hoe zien we dat op de grafiek?

2 Het ongeval loopt goed af. Waaraan zien we dat?

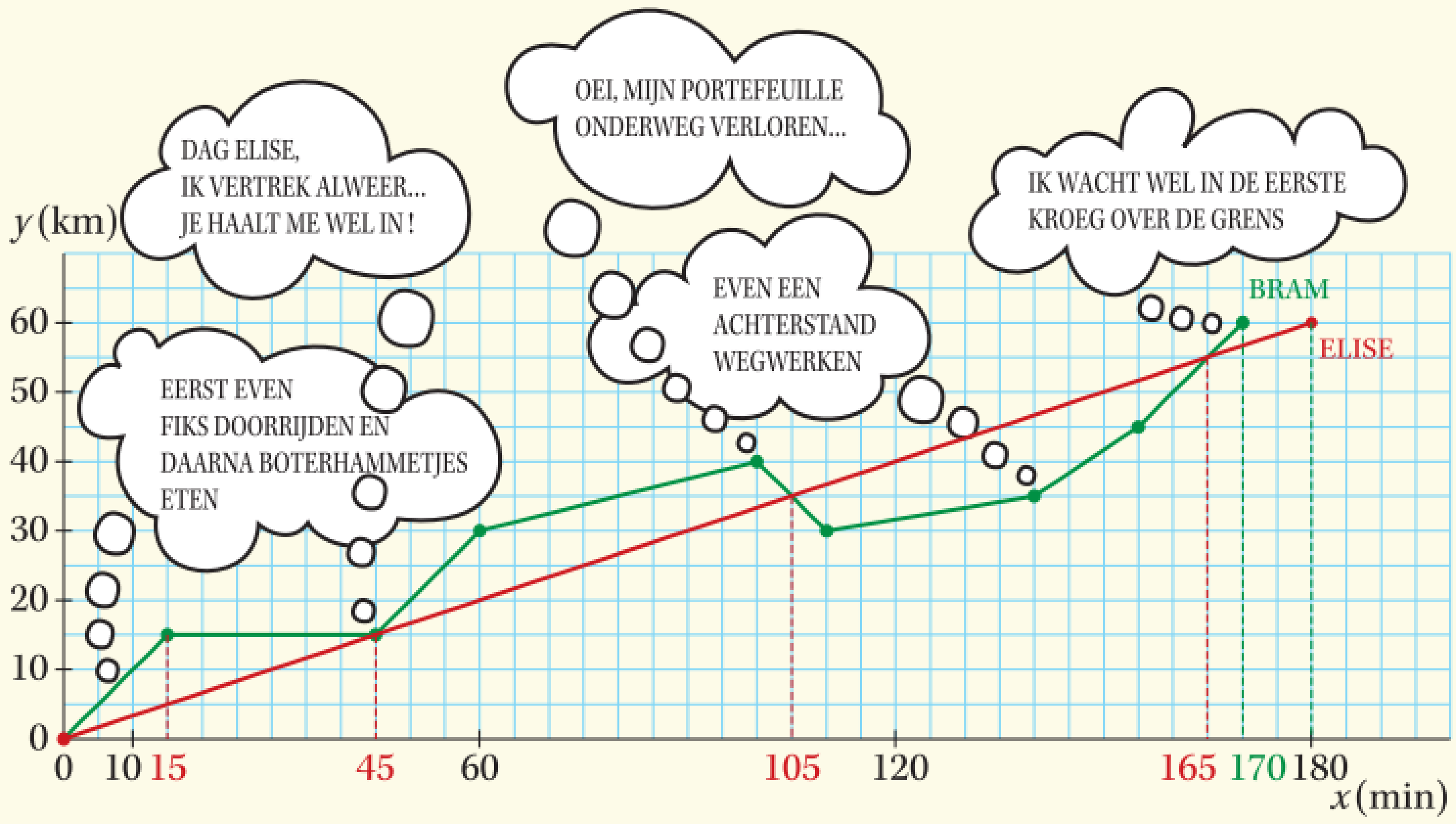
Wie vervolgt eerst zijn weg?

3 Bereken de gemiddelde snelheid in km/h van de fietser en van de automobilist tot op het moment van de aanrijding.

4 Aan welke gemiddelde snelheid moet de fietser over de resterende 3,5 km rijden om de verloren tijd in te halen?

zie pagina 331

10 Bram en Elise zijn klasgenoten en fietsen samen 60 km langs de Belgische kust. Elise fietst met een constante snelheid, Bram fietst eerder onregelmatig. Ze vertrekken samen aan het Zwin in Knokke en spreken af dat wie eerst het natuurreservaat de Westhoek in De Panne bereikt, blijft wachten. De grafiek toont hoe Bram en Elise dit traject afleggen.



1 Bereken de snelheid van Elise in kilometer per minuut.

2 Bepaal de helling van de grafiek van Elise.

3 Zoek twee tijdsintervallen van 45 minuten waarover de gemiddelde snelheid van Bram gelijk is aan de snelheid van Elise.

4 Zoek twee tijdsintervallen van 60 minuten waarover de gemiddelde snelheid van Bram gelijk is aan de snelheid van Elise.

5 Hoe vaak en op welke tijdstippen ontmoeten Bram en Elise elkaar? Beschrijf het rijgedrag van Bram bij elke ontmoeting.

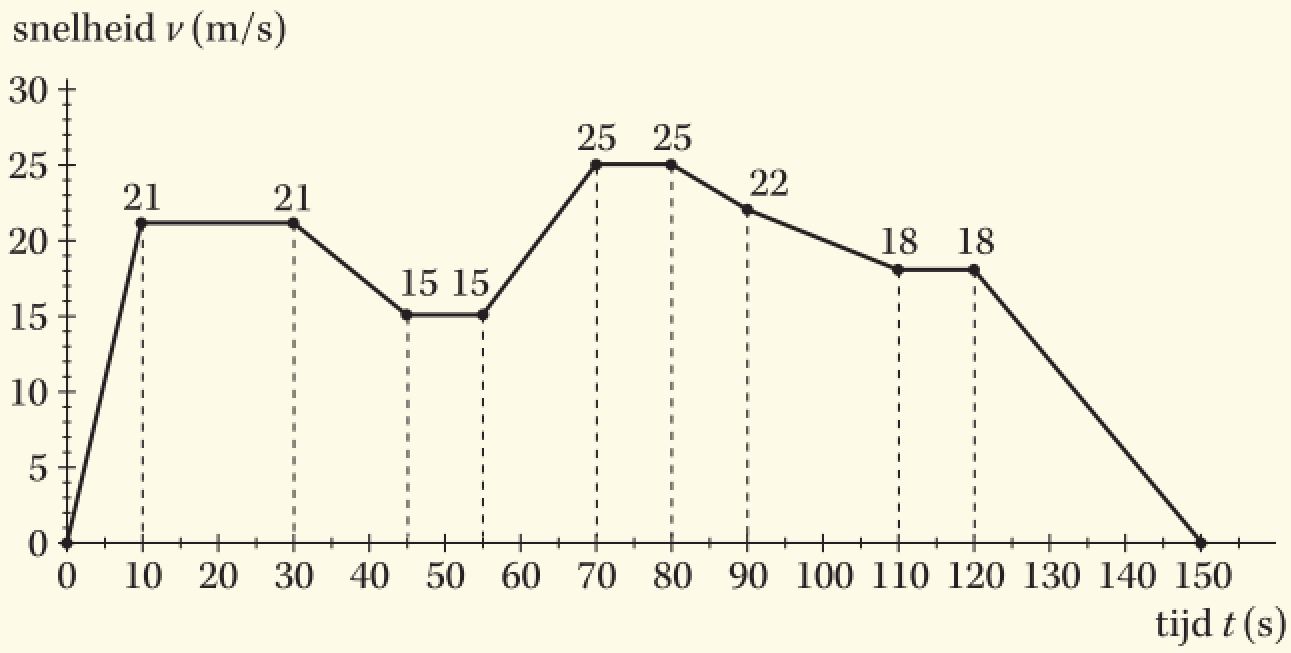
6 Hoeveel minuten heeft Bram minder nodig dan Elise om dit traject af te leggen?

7 Bereken de gemiddelde snelheid van Bram in kilometer per minuut over de trip van 60 km.

8 Bereken het verschil in graden, minuten en seconden tussen de gemiddelde hellingshoek van de grafiek van Bram en de hellingshoek van de grafiek van Elise.

zie pagina 333

11 Tijdens een afdaling wordt de snelheid van een skiër bepaald op verschillende tijdstippen. De meetresultaten zijn opgetekend in de tijd-snelheidgrafiek.



1. Bereken de maximale snelheid van de skiër in km/h.
2. In welke van de aangeduide tijdsintervallen versnelt de skiër?

   Hoe zien we dat op de grafiek?
3. In welk tijdsinterval is de gemiddelde versnelling van de skiër het grootst?

   Bepaal deze versnelling door de gemiddelde verandering van de snelheid te berekenen over dat interval.
4. In welke tijdsintervallen versnelt de skiër niet? Hoe zien we dat op de grafiek?
5. In welk tijdsinterval vertraagt de skiër het minst? Hoe zien we dat op de grafiek?

   Bereken de bijbehorende versnelling. Welke betekenis kunnen we aan het minteken in het rekenresultaat toekennen?

zie pagina 334

3.2 Ogenblikkelijke verandering

Ogenblikkelijke verandering en helling in een punt

1 Instap

De architect van de nieuwe sporthal staat voor een moeilijke keuze. Welke dakbedekking is het meest geschikt voor het gebogen dak? Hij raadpleegt een technische fiche met minimale dakhellingen waaraan daken moeten voldoen om waterinsijpeling te voorkomen. Daarna bestudeert hij nogmaals het ontwerp van het gebogen dak.

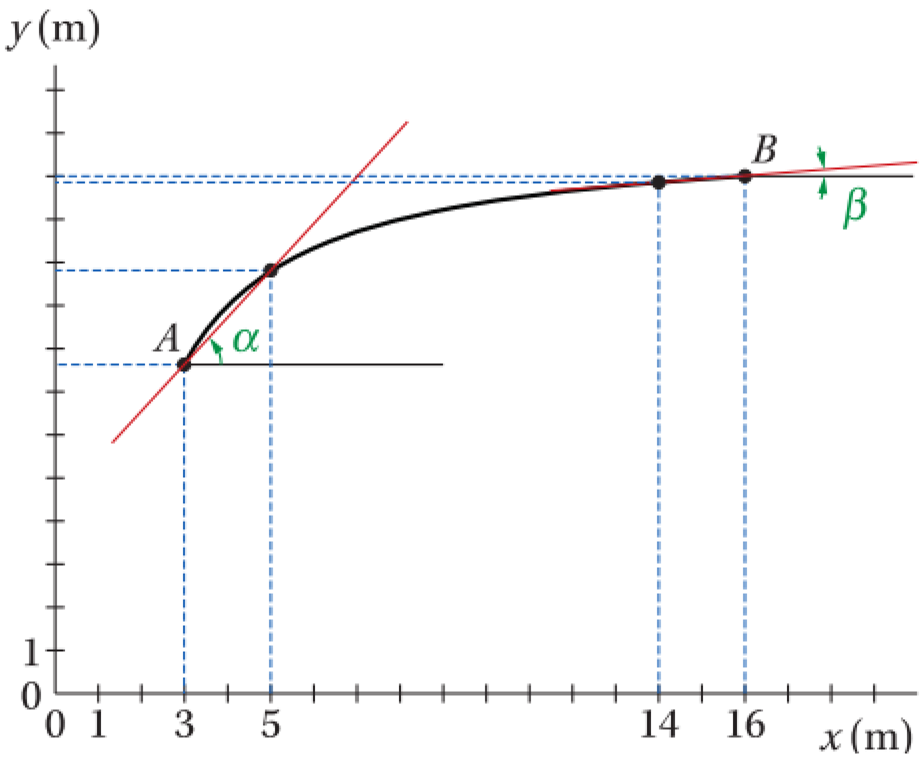


TECHNISCHE FICHE

dakbedekking	minimale hellingshoek
1 natuurleien	38°
2 tegelpannen	35°
3 kunstleien	27°
4 keramische dakpannen	25°
5 kleidakpannen	22°
6 shingles	15°
7 roofing	12°
8 metalen dakpanplaten	8°
9 zinkbanen	2°

GEBOGEN DAK

$$f(x) = 13 - \frac{16}{x} \quad \text{met} \quad \text{dom} f = [3, 16]$$



1 Bij daken met een kleine helling is de keuze voor de dakbedekking beperkt. In welk punt van het geschetste deel van het dak is de dakhelling het kleinst? ....

2 Bij daken met een helling van meer dan 70° worden stedenbouwkundige voorschriften overtreden en beboet. In welk punt van het dak is de helling het grootst? ....

3 Bereken de gemiddelde helling en de gemiddelde hellingshoek α van de grafiek van de dakfunctie over steeds kleiner wordende intervallen met linkergrenswaarde 3.
Rond de rekenresultaten af op 5 decimalen.

interval	[3, 5]	[3, 4]	[3 ; 3,1]	[3 ; 3,01]	[3 ; 3,001]
gem. helling	1,06667	1,33333	1,72043	....	....
gem. hellingshoek α	46,84761°	53,13010°	59,83270°	....	....

....

....

4 Bereken de gemiddelde helling en de gemiddelde hellingshoek β van de grafiek van de dakfunctie over steeds kleiner wordende intervallen met rechtergrenswaarde 16.
Rond de rekenresultaten af op 5 decimalen.

interval	[14, 16]	[15, 16]	[15,9 ; 16]	[15,99 ; 16]	[15,999 ; 16]
gem. helling	0,07143	0,06667	0,06289	....	....
gem. hellingshoek β	4,08562°	3,81407°	3,59877°	....	....

....

....

5 Hoe kleiner het interval waarover de gemiddelde dakhelling berekend wordt, hoe beter het rekenresultaat de plaatselijke hellingshoek benadert. We verkrijgen voldoende betrouwbare rekenresultaten met intervallen waarvan de grenswaarden niet meer dan 0,001 verschillen. Hoe groot is de hellingshoek van het dak in het punt *A* wanneer we deze nauwkeurigheidsnorm nastreven?

....

Zal de architect zijn plannen moeten wijzigen omwille van de stedenbouwkundige voorschriften?

....

6 Hoe groot is de hellingshoek van het dak in het punt *B* wanneer we werken met een interval waarvan de grenswaarden niet meer dan 0,001 verschillen?

....

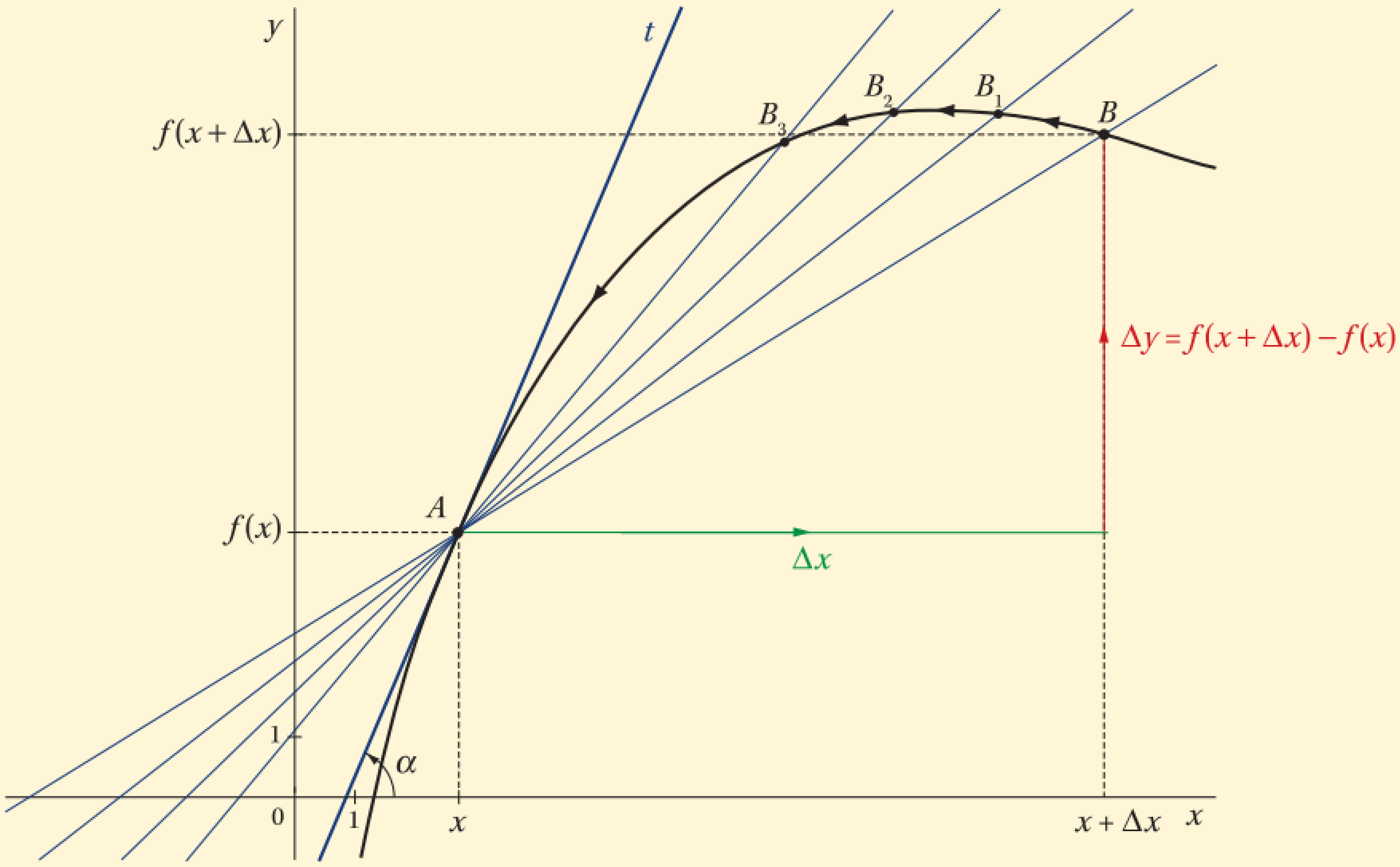
Welke dakbedekking is aangewezen als we rekening houden met de dakhelling in *B*?

....

Ogenblikkelijke verandering en helling in een punt

Om de helling van een grafiek in een punt $A(x, f(x))$ te bepalen, laten we een willekeurig punt $B(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ van de grafiek naderen tot het punt A. Anders gezegd: we laten de stapgrootte Δx naderen tot 0.

$B \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to \ldots \to A$ **punt B nadert tot punt A**



De rechte AB zal via de tussenliggende rechten AB_1, AB_2, AB_3, ... naderen tot de raaklijn t aan de grafiek in het punt A.

$AB \to AB_1 \to AB_2 \to AB_3 \to \ldots \to t$ **rechte AB nadert tot raaklijn t**

Als Δx nadert tot 0, dan zal de richtingscoëfficiënt $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ van de rechte AB naderen tot de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t.

We schrijven: $$\textbf{rico}\, t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

We lezen: rico t is gelijk aan de limiet van $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ voor Δx gaande naar 0.

De richtingscoëfficiënt of de helling van de raaklijn t noemen we:

- de **helling** van de grafiek in het punt $A(x, f(x))$.
- de **ogenblikkelijke verandering** van de functiewaarde $f(x)$ in het punt $A(x, f(x))$.

De hoek α die de raaklijn t maakt met de x-as noemen we de **hellingshoek** van de grafiek in het punt $A(x, f(x))$ en berekenen we met de formule

$$\tan \alpha = \text{rico}\, t$$

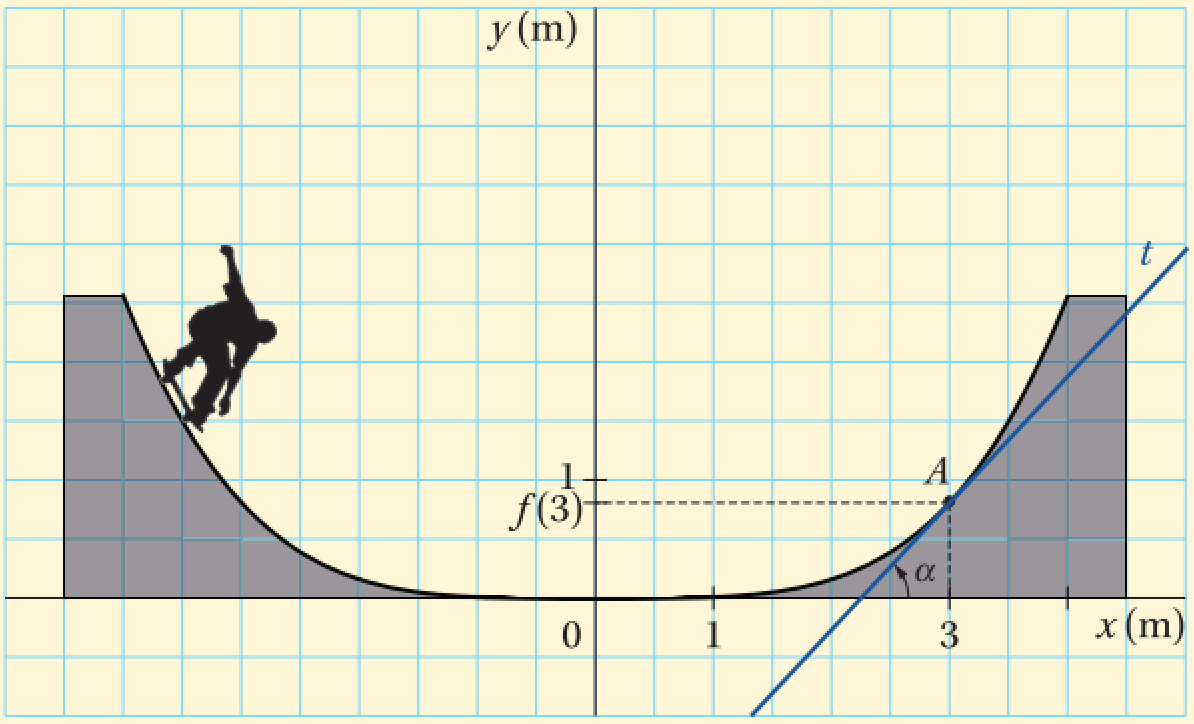
In de praktijk kunnen we de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t berekenen door Δx gelijk te stellen aan 0,001.

$$\text{rico } t = \frac{f(x+0{,}001)-f(x)}{0{,}001}$$

$\Delta x = 0{,}001$

Voorbeeld

De profieldoorsnede van een skateboardpiste hebben we beschreven met de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ met dom $f = [-4, 4]$. We berekenen de helling en de hellingshoek van de ramp in het punt $A(3, f(3))$.



De helling van de ramp in het punt $A(3, f(3))$ is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t.

$$\text{rico } t = \frac{f(3+0{,}001)-f(3)}{0{,}001}$$
$$= 1{,}080...$$

$\text{rico } t = \frac{f(x+0{,}001)-f(x)}{0{,}001}$ met $x = 3$

ICT: differentiequotiënten berekenen

De helling in het punt A is 1,08.

De hellingshoek α berekenen we met de toets TAN^{-1} of Atn.

$\tan \alpha = 1{,}080...$

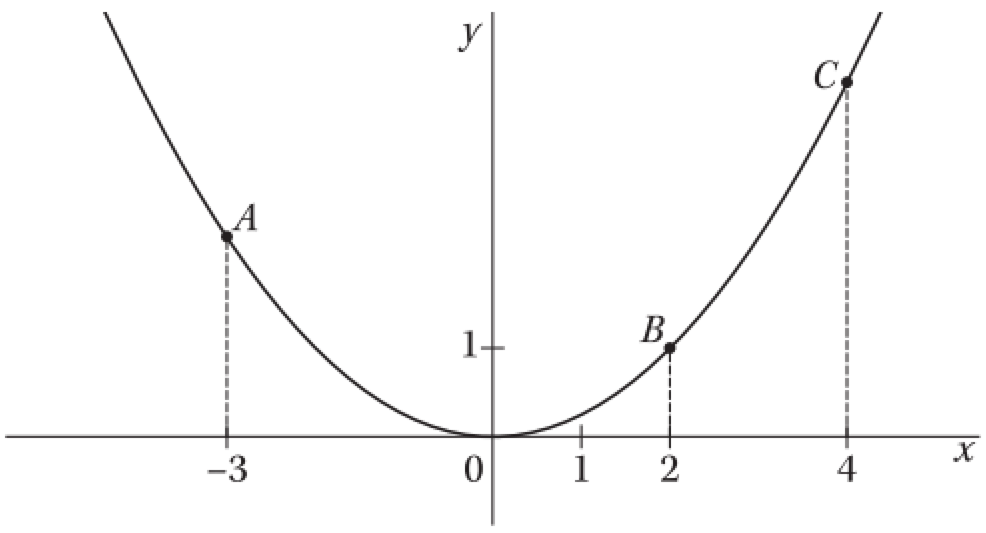
$\tan \alpha = \text{rico } t$

$\alpha = 47{,}216...°$

De hellingshoek in het punt A is 47°.

2

Bereken de helling en de hellingshoek van de parabool met voorschrift $f(x) = 0{,}25x^2$ in de punten A, B en C. Rond de helling af op 1 decimaal en de hellingshoek op 1°.



1 Helling in A | Hellingshoek in A

.... | ....

2 Helling in B | Hellingshoek in B

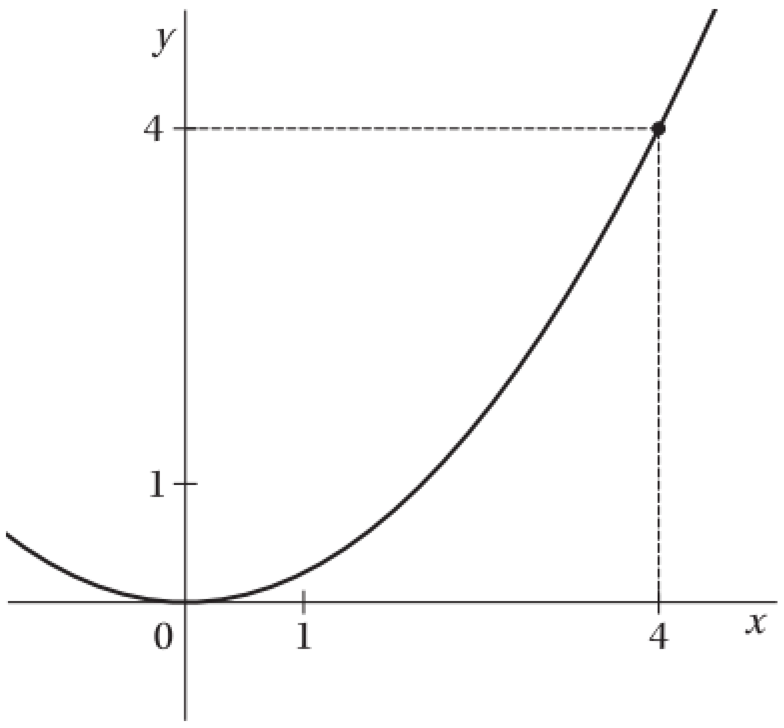
.... | ....

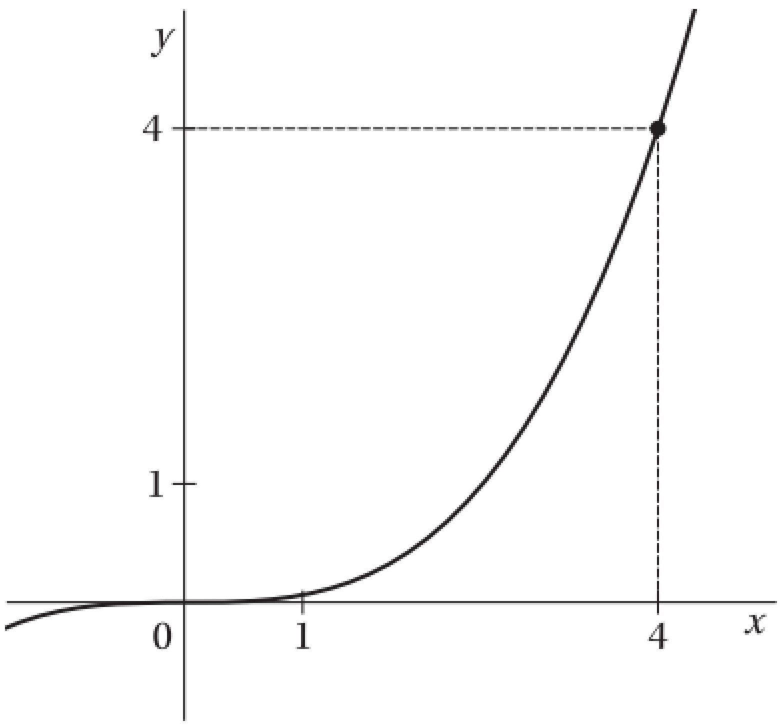
3 Helling in C | Hellingshoek in C

.... | ....

3

Gegeven zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = \frac{1}{16}x^3$.





1 Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ over het interval $[0, 4]$.

....

Bereken de gemiddelde verandering van $g(x)$ over het interval $[0, 4]$.

....

Wat stellen we vast?

....

2 Bereken de ogenblikkelijke verandering van $f(x)$ in $x = 4$.

....

Bereken de ogenblikkelijke verandering van $g(x)$ in $x = 4$.

....

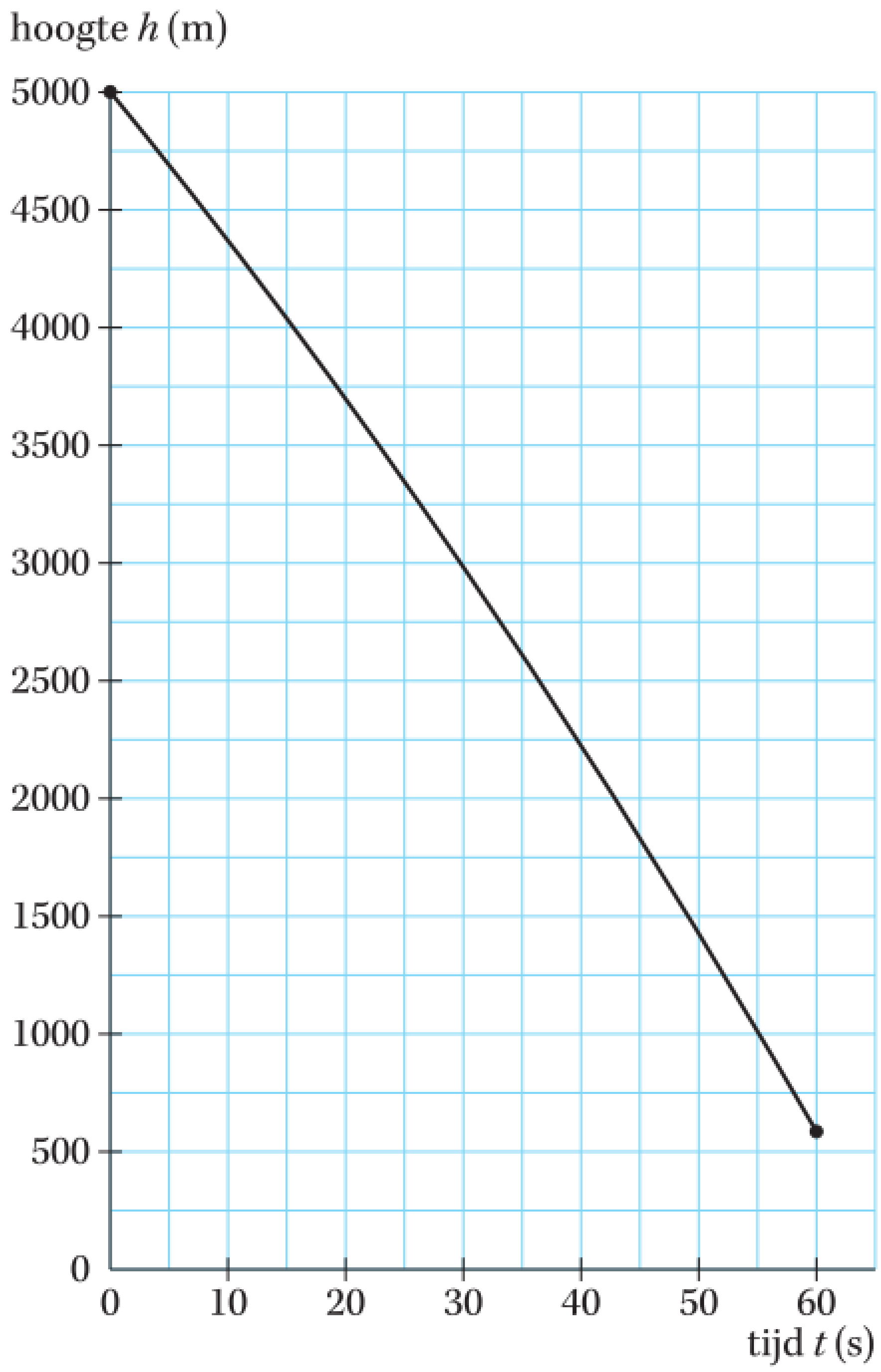
Wat stellen we vast?

....

Ogenblikkelijke snelheid

4 Instap

Bij parachutespringen is het formatiespringen vrij populair. In hun vrije val maken twee of meer springers zoveel mogelijk verschillende figuren of formaties. Omdat de vrije val 60 seconden duurt, verlaten de parachutisten het vliegtuig op een hoogte van 5000 meter. De hoogte h van de parachutisten in vrije val na t seconden, berekenen we met $h(t) = -0{,}21t^2 - 61t + 5000$. De grafiek toont de functie in het werkdomein [0, 60].



1 Bereken de gemiddelde valsnelheid van de parachutisten over de steeds kleiner wordende tijdsintervallen. Rond af op 3 decimalen.

tijdsinterval	[20, 30]	[20, 25]	[20, 21]	[20 ; 20,5]	[20 ; 20,1]
gemiddelde valsnelheid (m/s)	71,5	70,45	69,61	....	....

....

....

....

....

....

....

2 Welke van de gemiddelde snelheden is de beste benadering voor de valsnelheid die de parachutisten hebben juist 20 seconden na het verlaten van het vliegtuig?

....

3 Bereken met de ogenblikkelijke verandering van de hoogte, de valsnelheid van de springers na 20 seconden.

....

....

4 Bereken de valsnelheid van de springers op het einde van hun vrije val, dit is 60 seconden na het verlaten van het vliegtuig.

....

....

5 Hoe verandert de snelheid van de springers tijdens hun vrije val?

....

6 De gemiddelde verandering van de valsnelheid over een tijdsinterval, noemen we de gemiddelde versnelling over dat interval. Bereken de gemiddelde versnelling van de parachutisten over het tijdsinterval [20, 60].

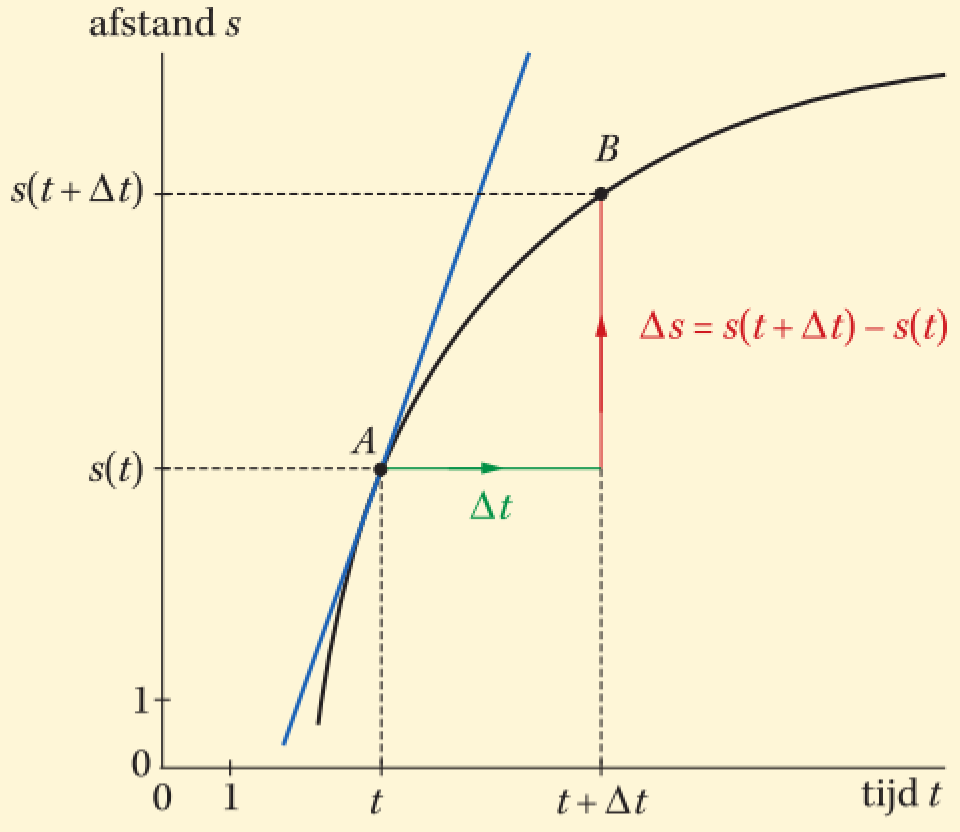
....

....



Ogenblikkelijke snelheid

De tijd-afstandgrafiek laat de verandering van de afstand s zien over het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$.



Als Δt nadert tot 0, dan zal het differentiequotiënt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ naderen tot de ogenblikkelijke verandering van s op het tijdstip t. In een tijd-afstandgrafiek spreken we van de **ogenblikkelijke snelheid** of kortweg de **snelheid** op het tijdstip t. Stellen we de snelheid voor met het symbool v, dan is de formule voor de snelheid op het ogenblik t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Met deze formule voor de snelheid berekenen we ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in het punt $A(t, s(t))$.

Dit betekent: hoe steiler de raaklijn, hoe hoger de snelheid.

In de praktijk kunnen we de ogenblikkelijke snelheid op een tijdstip t berekenen door Δt gelijk te stellen aan 0,001.

$$v = \frac{s(t + 0{,}001) - s(t)}{0{,}001} \qquad \Delta t = 0{,}001$$

Merk op

Als de tijd-afstandgrafiek een rechte is, dan is de snelheid constant en gelijk aan de helling van de rechte. In dit geval spreken we van een **eenparige beweging**.

5

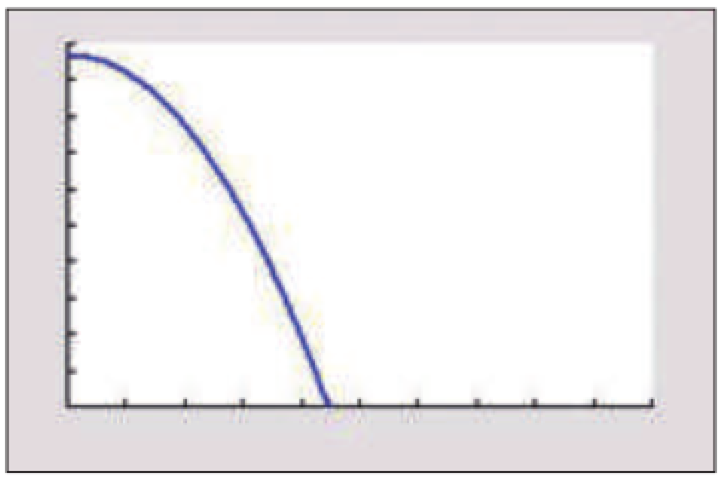
Usain Bolt vestigde tijdens het WK in 2009 te Berlijn een nieuw wereldrecord op de 100 meter in 9,58 seconden. Een sportreporter wist te vertellen dat hij tijdens de finale een topsnelheid bereikte van 44 km/h. Gaat het hier over een ogenblikkelijke snelheid of een gemiddelde snelheid? Verklaar het antwoord door de gemiddelde snelheid te berekenen.



6

Een voorwerp dat van de Sint-Romboutstoren te Mechelen valt, zal na enkele seconden de grond bereiken. De tijd-afstandgrafiek van de valbeweging voldoet aan het voorschrift $h(t) = 97{,}28 - 4{,}91t^2$ waarin h de hoogte in meter en t de tijd in seconden voorstelt.





1 Wat is de hoogte van de Sint-Romboutstoren?

2 Bereken de snelheid van het vallende voorwerp na 1, 2 en 3 seconden. Druk de snelheid uit in m/s en in km/h.

Na 1 seconde

....

....

....

Na 2 seconden

....

....

....

Na 3 seconden

....

....

....

3 Na hoeveel seconden valt het voorwerp op de grond? Rond af op 2 decimalen.

....

....

4 Wat is de snelheid in km/h van het voorwerp bij het bereiken van de grond?

....

....

....

....

7

Een eend vliegt op van de grond en stijgt met een snelheid van 2 m/s. Een havik die op een hoogte van 16 meter vliegt, bemerkt het opvliegen van de eend en maakt onmiddellijk een duikvlucht. De hoogte van beide vogels kunnen we berekenen met:

$h_1(t) = 2t$ — h_1: hoogte eend in m

$h_2(t) = 16 - 5t^2$ — h_2: hoogte havik in m

t: tijd in s

1 Na hoeveel tijd en op welke hoogte valt de havik de eend aan?



....

....

2 Wat is de daalsnelheid van de havik op het ogenblik dat hij de eend aanvalt?

....

....

....

....

Uitdagingen

1 Bereken de helling van de parabool met voorschrift $f(x) = x^2 + 5x - 14$ in het snijpunt met de y-as en in de snijpunten met de x-as.

zie pagina 336

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = -4x^2 - 8x + 9$ en $g(x) = 4$. Bereken de hoek waaronder de grafieken van deze twee functies elkaar snijden.

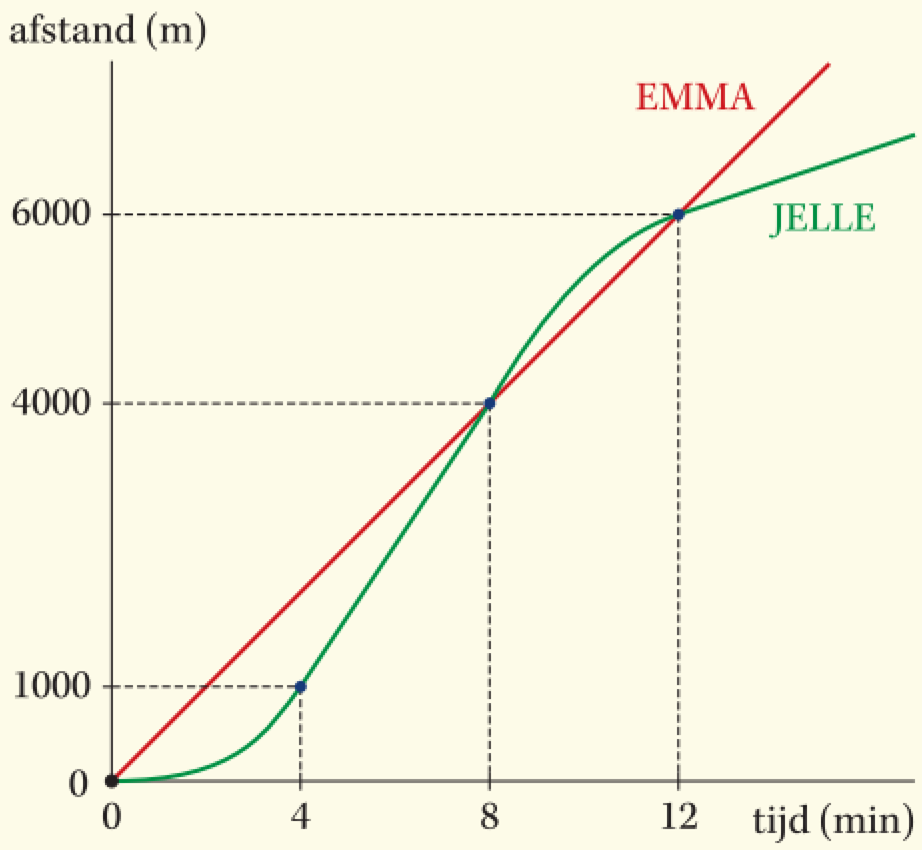
zie pagina 336

3 Teken de grafiek van de functie $f(x) = |x - 3|$ in een kijkvenster met gelijke schaalverdelingen op de assen.

1. Hoeveel hellingen heeft de grafiek in het punt (3, 0)?
2. Bepaal deze hellingen met behulp van de grafiek.

zie pagina 337

4 Als voorbereiding op een tiendaagse fietstocht maken Jelle en Emma een oefenritje. De afstand die ze afleggen in functie van de tijd kunnen we aflezen op de grafiek.



1. Beschrijf aan de hand van de grafiek de fietswijze van Emma en Jelle.
2. Aan welke snelheid in km/h fietst Emma?
3. Bereken de gemiddelde snelheid in km/h van Jelle tijdens de eerste vier minuten van de rit.
4. Wat is de snelheid in km/h van Jelle op het ogenblik dat hij Emma voorbij steekt?
5. Wanneer rijden Jelle en Emma aan dezelfde snelheid? Vink de tijdstippen aan.

na 3 minuten	na 4 minuten	na 10 minuten	na 12 minuten
☐	☐	☐	☐

zie pagina 337

5 Bij het overspringen van een verkeerslicht van groen naar oranje moet een auto vertragen en stoppen. De snelheid van de auto tijdens deze beweging kunnen we berekenen met $s(t) = -\frac{68}{45}t^2 + \frac{68}{3}t$ waarin s de afstand in meter en t de tijd in seconden voorstelt.

1. Na hoeveel meter komt de auto tot stilstand?
2. Wat is het werkdomein van de functie s?
3. Wat is de snelheid van de wagen op het ogenblik dat het verkeerslicht overspringt?

zie pagina 338

Exploratie

Het uittesten van een nieuw valscherm

Recreatieve parachutespringers springen vaak uit de laadruimte van een sportvliegtuig vanaf een hoogte van meer dan 2500 meter. Vanaf deze hoogte kunnen ze minstens 1000 meter van een vrije val genieten vooraleer hun parachute te openen. Gedurende de vrije val blijft de snelheid van de valschermspringers niet de hele tijd toenemen. De wrijving met de lucht zorgt ervoor dat de maximale valsnelheid spoedig na de sprong bereikt wordt. De snelheid bij de landing hangt af van de kwaliteit van de parachute en van de vaardigheid van de springer. Vooral valschermen voor duosprongen moeten aan de normen voor een 'zachte landing' voldoen. De landingssnelheid bij een routinesprong mag hier slechts 5 m/s bedragen. Bij militaire sprongen landt men aan 6 m/s.

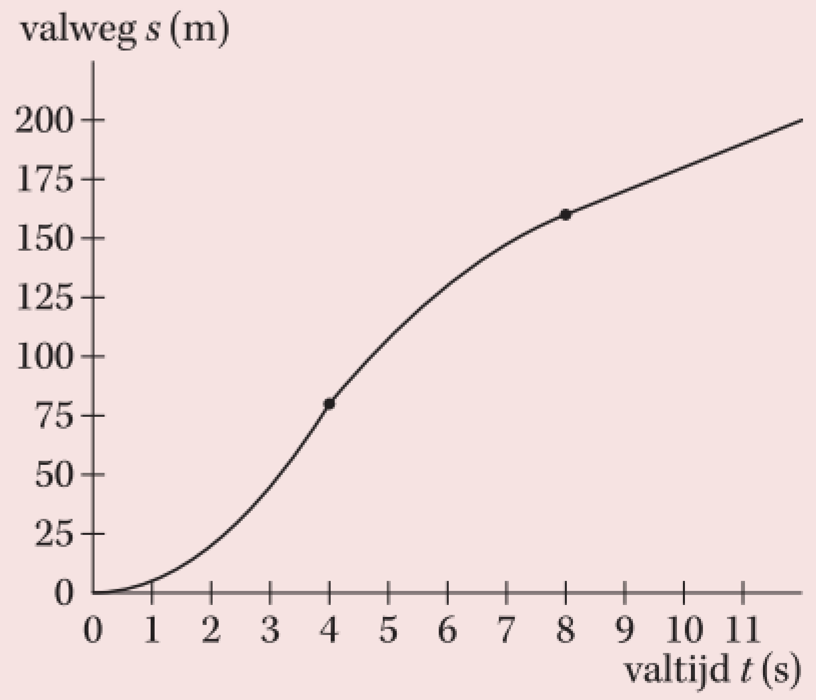
Een nieuw valscherm moet aan een testsprong onderworpen worden alvorens het op de markt kan gebracht worden. De testspringer springt vanaf een hoogte van 1880 meter en opent vrijwel onmiddellijk zijn parachute. Zijn vlucht wordt beschreven met de formules

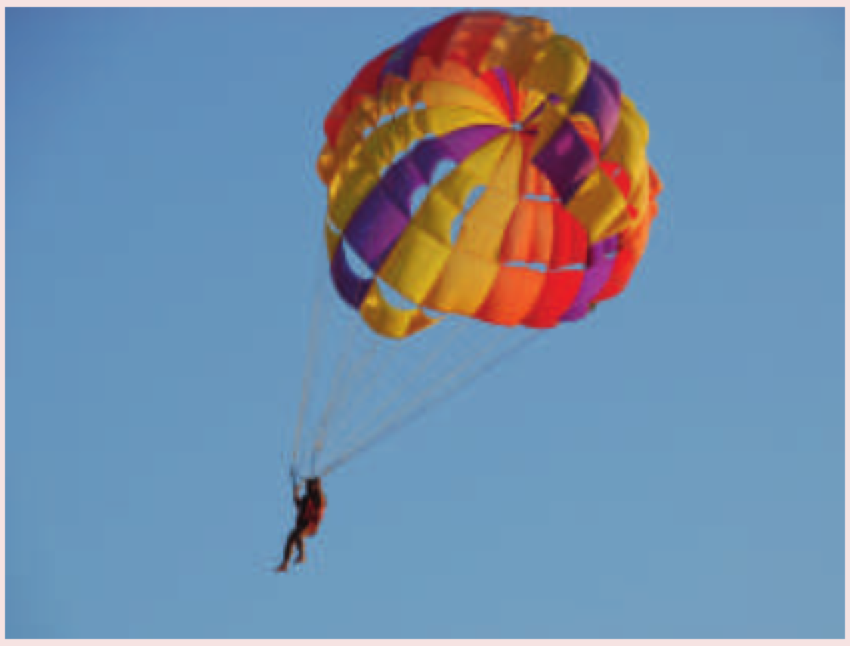
$s = 5t^2$ met $t \in [0, 4]$

$s = -2{,}5t^2 + 50t - 80$ met $t \in \,]4, 8]$

$s = 10t + 80$ met $t \in \,]8, ?]$

waarin s de valweg in meter voorstelt en t de valtijd in seconden.





1 Na hoeveel seconden bereikt de testspringer de grond?

2 Wat is het werkdomein van het derde grafiekdeel?

3 Stel een drievoudig voorschrift op dat de valweg beschrijft in functie van de valtijd.

4 Bereken de gemiddelde snelheid van de valschermspringer over de hele val. Druk het antwoord uit in m/s en in km/h.

5 Bereken de ogenblikkelijke snelheid van de valschermspringer in m/s en in km/h

   a twee seconden na het verlaten van het vliegtuig.

   b vijf seconden na het verlaten van het vliegtuig.

Wanneer we de ogenblikkelijke valsnelheid van de parachutist willen kennen in de punten $(4, s(4))$ en $(8, s(8))$, dan moeten we de plaatselijke helling telkens op twee manieren berekenen: eerst met $\Delta t = -0{,}001$ en daarna met $\Delta t = 0{,}001$.

6 Bereken de ogenblikkelijke valsnelheid van de valschermspringer in m/s en in km/h

a vier seconden na het verlaten van het vliegtuig.

b acht seconden na het verlaten van het vliegtuig.

7 Is de valsnelheid juist voor en juist na vier seconden gelijk?

8 Hoe verklaren we dit?

9 Met welke snelheid bereikt de valschermspringer de grond?

10 Mag de parachute op de markt gebracht worden?

zie pagina 339

4

Afgeleiden van veeltermfuncties

Flitspalen zijn uitgerust met snelheidscamera's die de ogenblikkelijke snelheid van een voorbijrijdend voertuig meten met behulp van uitgezonden radiogolven. Buiten de snelheid wordt ook andere informatie geregistreerd zoals dag, tijdstip en controleplaats. Met deze gegevens kunnen de volgende vragen van de politierechtbank beantwoord worden.

- Hoe snel reed de wagen op het ogenblik van de botsing?
- Vertraagde of versnelde de wagen bij het naderen van het kruispunt?
- Wat was de snelheid van de wagen op 50 meter voor de verkeerslichten?

In de toegepaste wiskunde kunnen we ogenblikkelijke snelheden berekenen met afgeleide functies als we over de gepaste formules beschikken.

4.1 Afgeleide functies

4.2 Afgeleiden van producten en machten

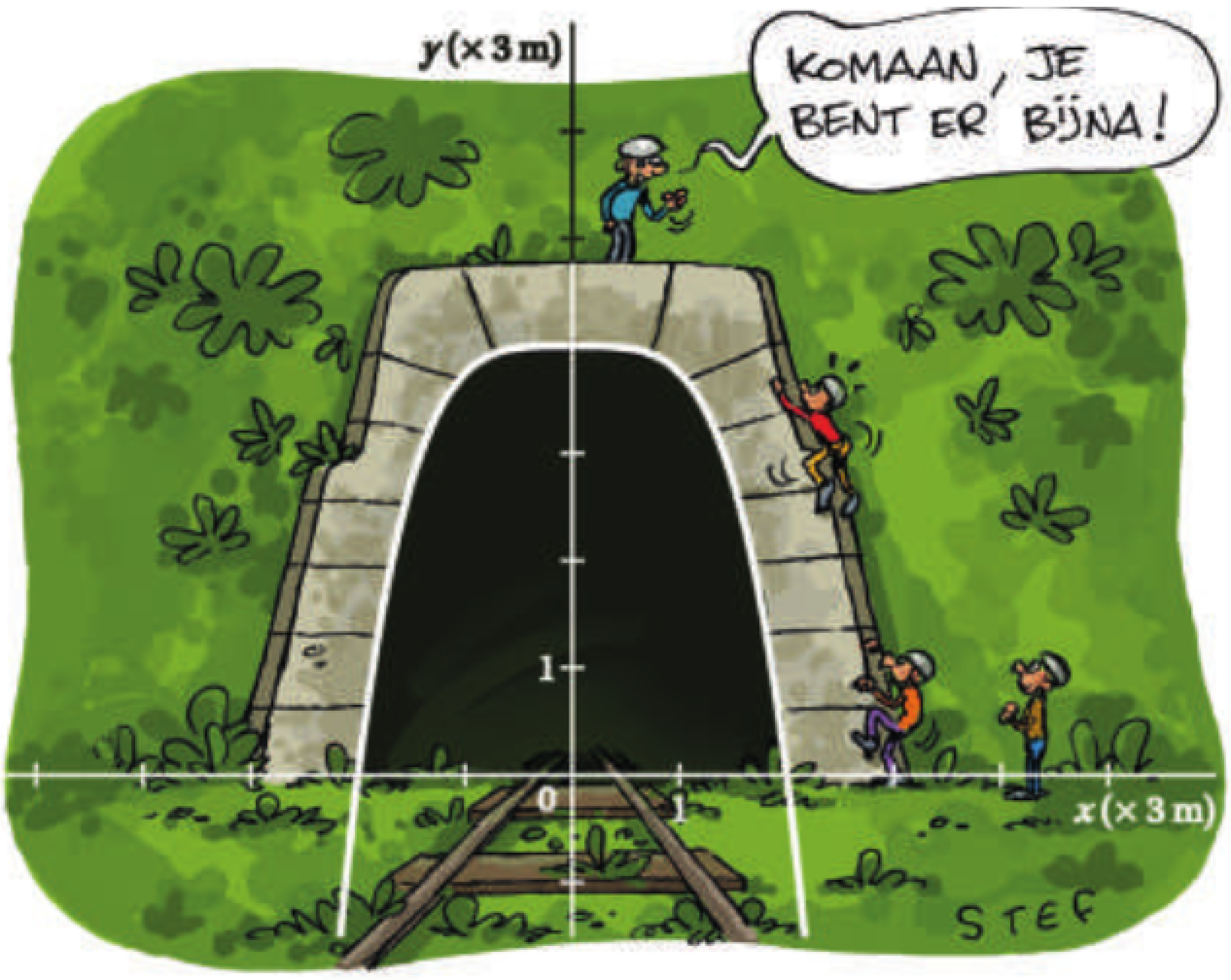


4.1 Afgeleide functies

Hellingsfuncties

1 Instap

De uitgang van een oude spoorwegtunnel wordt door beginnende klimmers gebruikt om te oefenen. De dwarsdoorsnede van de tunnel beschrijven we met de functie $f(x) = -0{,}25x^4 + 4$ met dom $f = [-2, 2]$. Op de klimwand zijn bordjes aangebracht waarop de moeilijkheidsgraad van de plaatselijke helling is af te lezen.



1 Bereken met ICT de helling van de klimwand in een punt $P(x, f(x))$ met het differentiequotiënt $\dfrac{f(x+0{,}001)-f(x)}{0{,}001}$. Rond af op een geheel getal.

x	-2	-1	0	1	2
helling in P	....	....	....	....	....

2 Vink het verband aan tussen het origineel x en de bijbehorende helling.

helling in $P = 4x$	☐	helling in $P = 2x^2$	☐	helling in $P = x^3$	☐
helling in $P = -4x$	☐	helling in $P = -2x^2$	☐	helling in $P = -x^3$	☐

3 Bereken met het gekozen verband de helling in het punt $A(-0{,}2\,; f(-0{,}2))$.

....

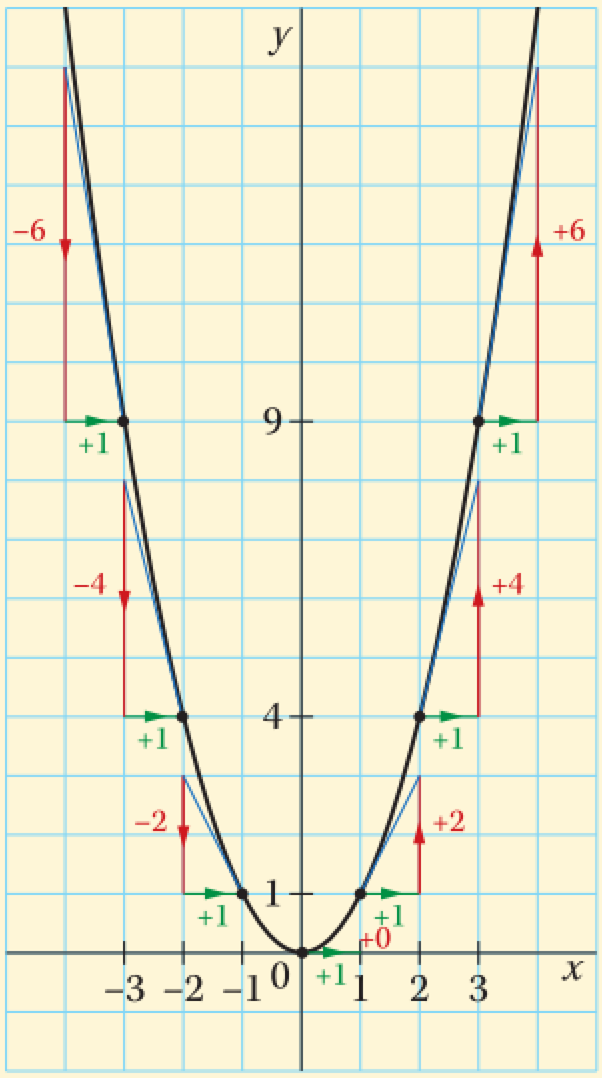
Hellingsfuncties

De tabel van de functie $f(x) = x^2$ is aangevuld met de hellingen van de grafiek in de punten $P(x, f(x))$.

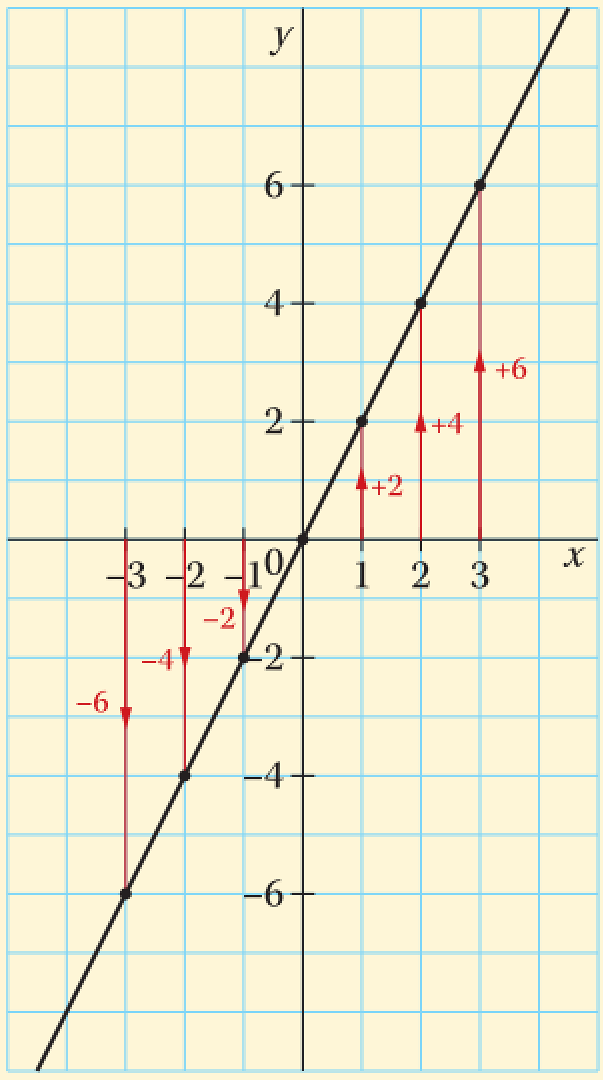
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
helling in P	−6	−4	−2	0	2	4	6

We tekenen de grafiek van f en ook een grafiek waarbij de hellingen verticaal uitgezet zijn op de x-as. Deze grafiek noemen we de **hellingsgrafiek** van f.

GRAFIEK



HELLINGSGRAFIEK



De tabel en de hellingsgrafiek laten vermoeden dat de helling van de grafiek van f in een willekeurig punt gelijk is aan tweemaal het origineel. Dit verband tussen helling en origineel noemen we de **hellingsfunctie** of de **afgeleide functie** van f en noteren we met het symbool $\boldsymbol{f'}$.

De afgeleide functie van $f(x) = x^2$ is $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

Met de afgeleide functie kunnen we de helling in een willekeurig punt van de grafiek berekenen.

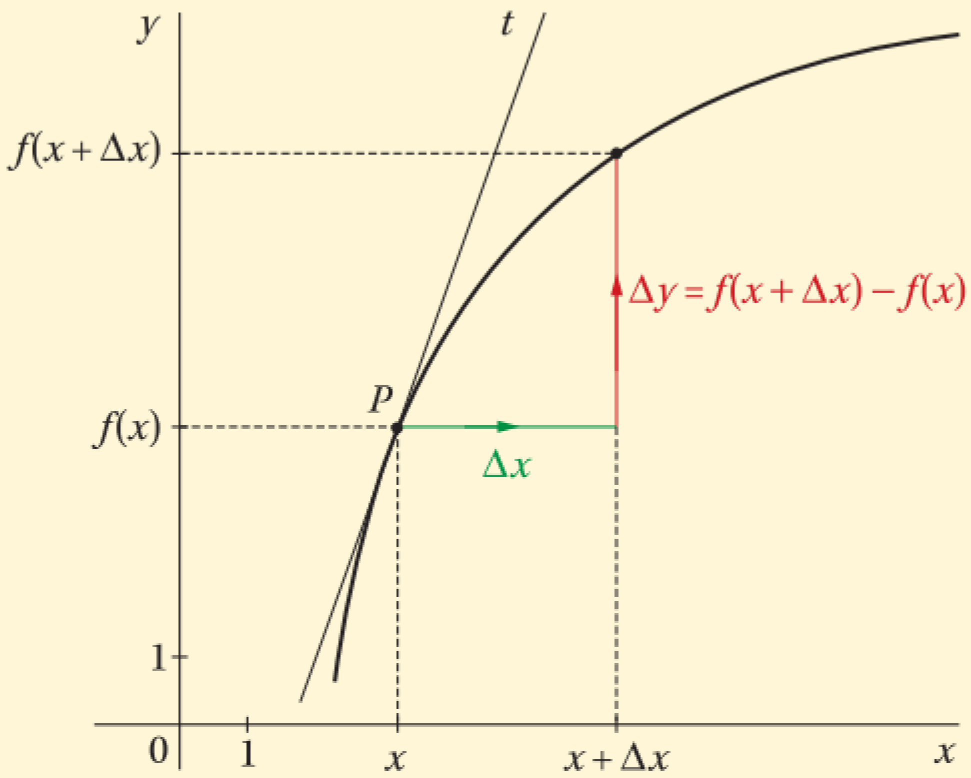
Voorbeeld

We berekenen de helling in het punt $A(5, 25)$ van de grafiek van $f(x) = x^2$.

- afgeleide functie: $f'(x) = 2x$
- helling in $A = f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$

Formule voor afgeleide functie

De rechte t is de raaklijn in een willekeurig punt P aan de grafiek van de functie f.



De helling van de grafiek in een punt $P(x, f(x))$ stellen we voor met $f'(x)$ en wordt bepaald door de rico van de raaklijn t in P:

$$f'(x) = \text{rico } t$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

zie pagina 192: rico $t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Voorbeeld

We berekenen het functievoorschrift van de afgeleide functie van $f(x) = x^2$.

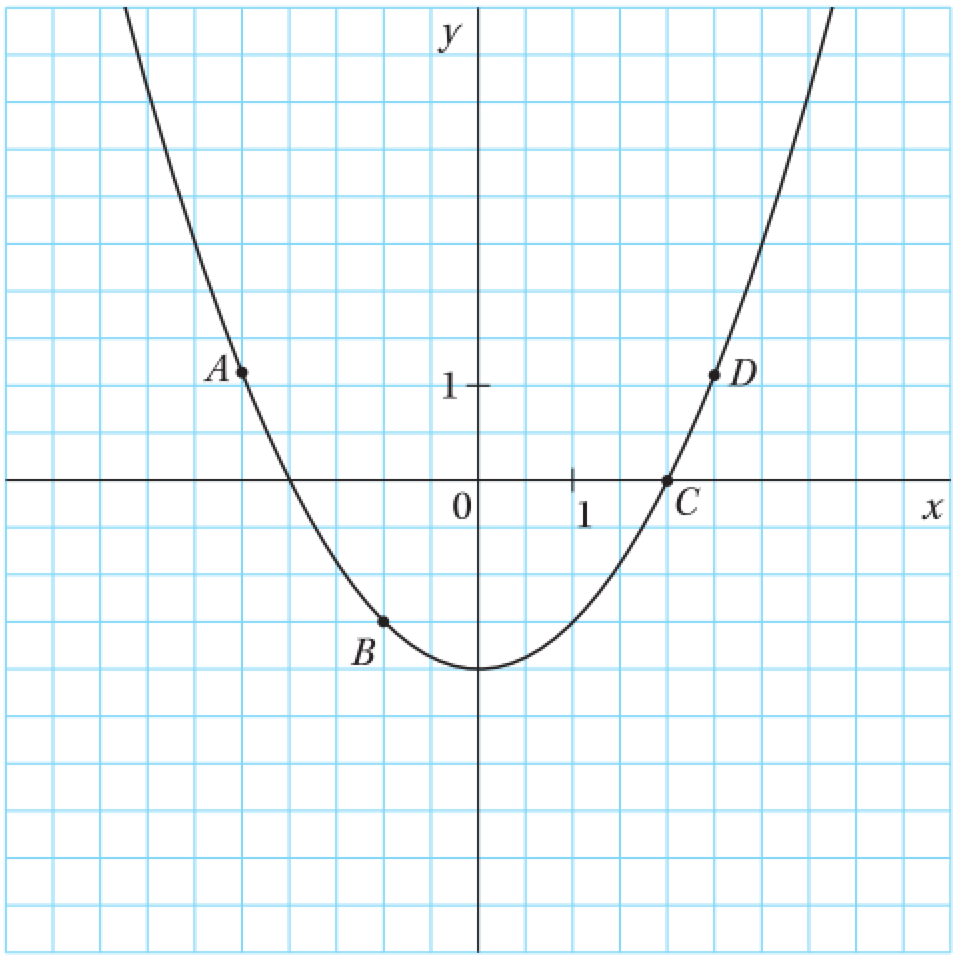
$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	formule afgeleide functie
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$	$f(x) = x^2$
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$	tegengestelde termen weglaten
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$	Δx afzonderen
$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$	breuk vereenvoudigen
$= 2x$	als $\Delta x \to 0$, dan $2x + \Delta x \to 2x$

De afgeleide functie van $f(x) = x^2$ is $f'(x) = 2x$.

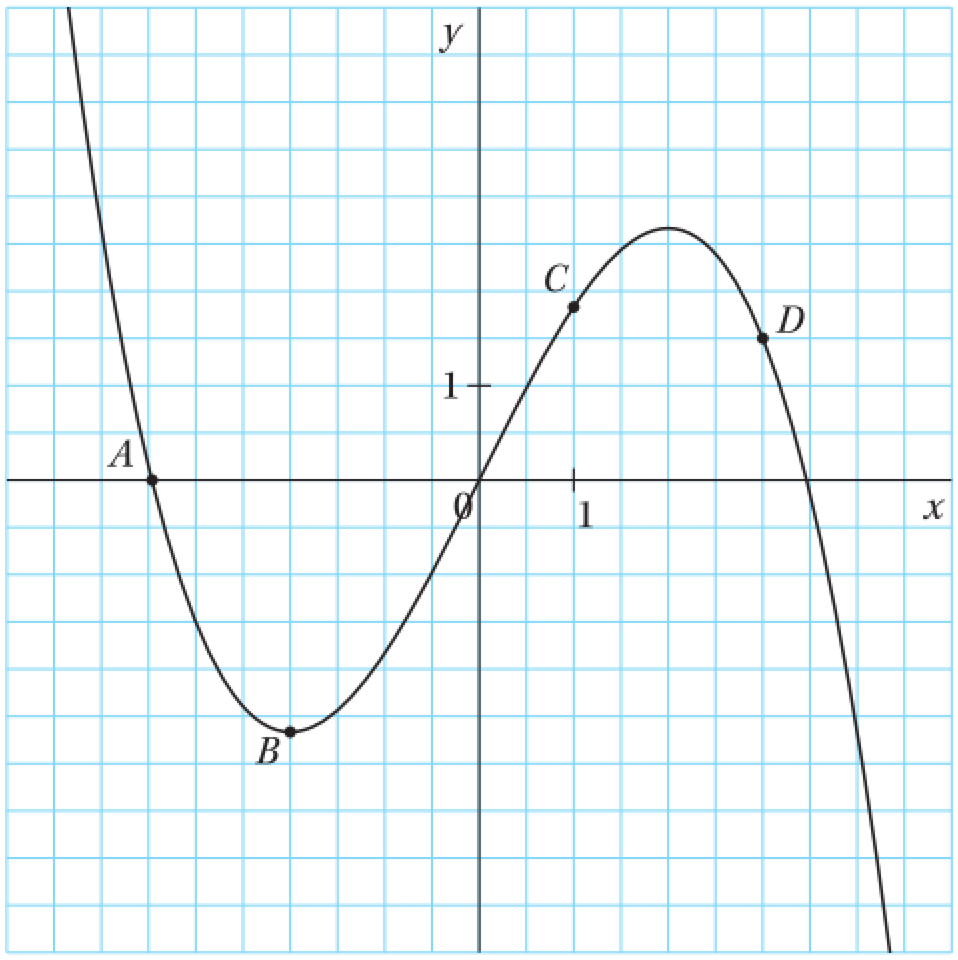
2

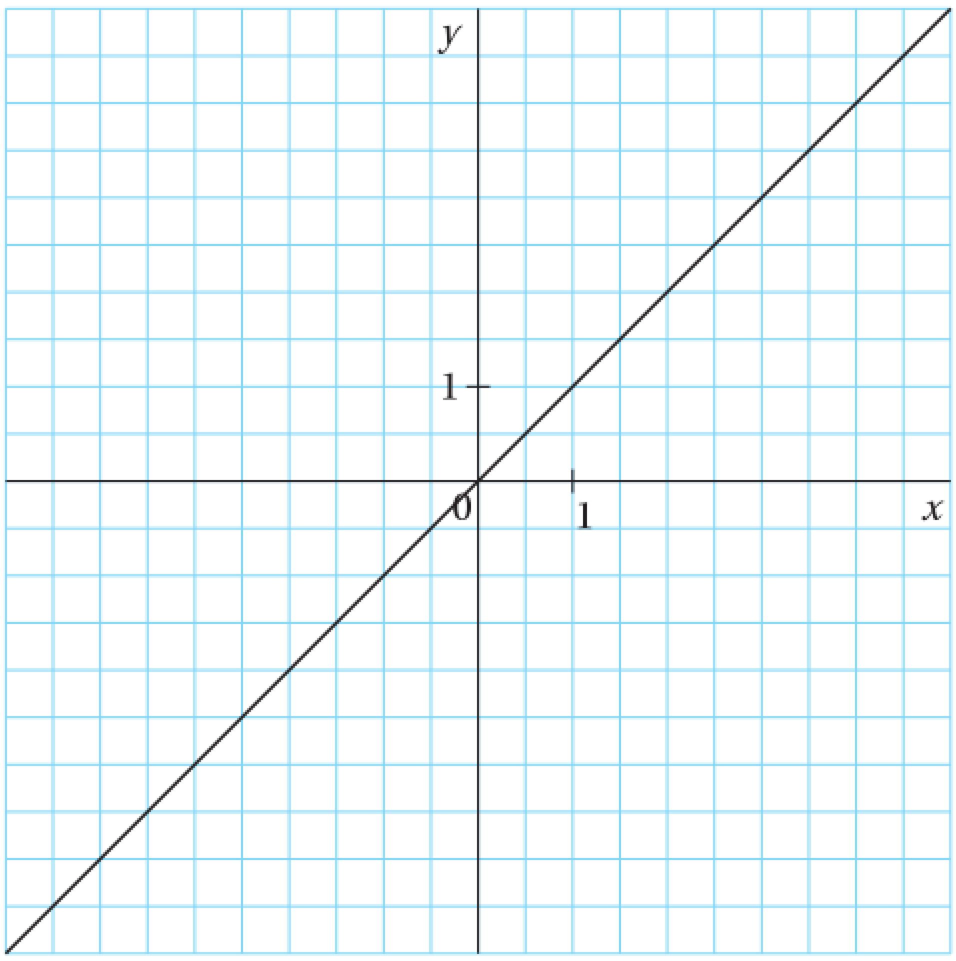
Gegeven is een grafiek met bijbehorende hellingsgrafiek.
Lees de helling van de grafiek in de punten A, B, C en D af op de hellingsgrafiek.

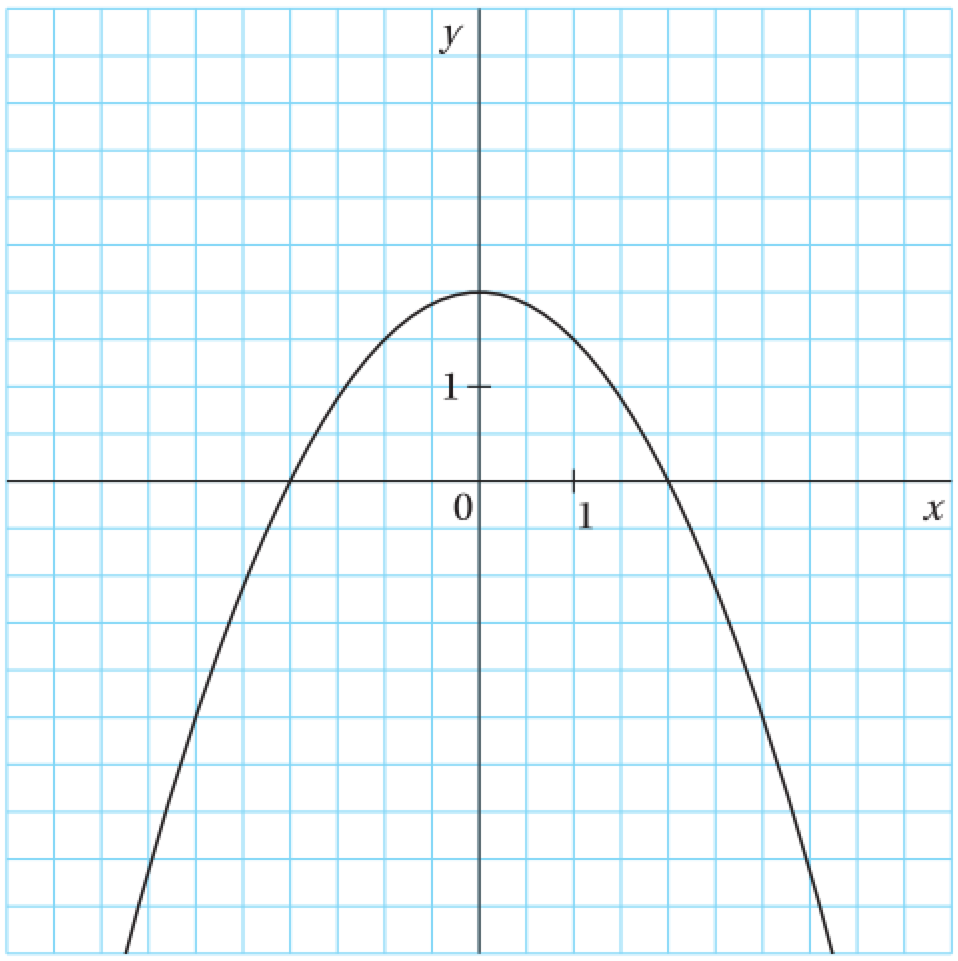
1



2







1

helling in A = ...

helling in B = ...

helling in C = ...

helling in D = ...

2

helling in A = ...

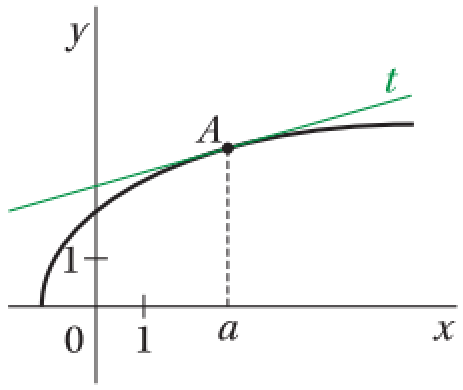
helling in B = ...

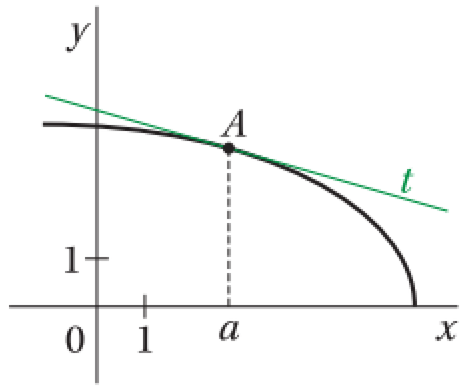
helling in C = ...

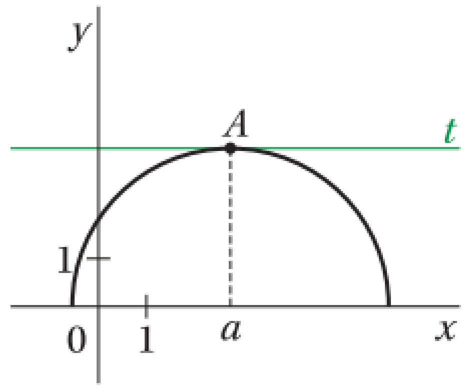
helling in D = ...

3

De rechte t is de raaklijn in het punt $A(a, f(a))$ aan de grafiek van f. Verbind elke grafiek met het verloop van de functie in a en met het teken van de afgeleide in a.



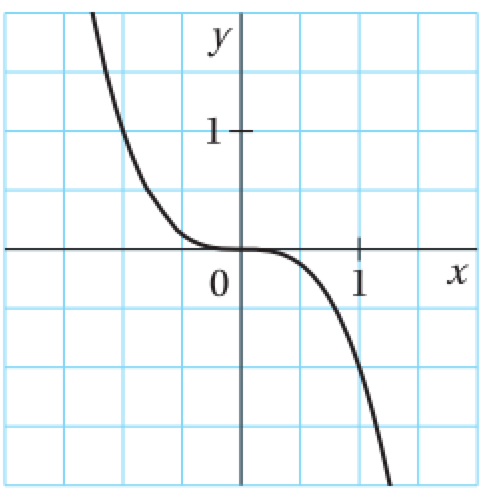


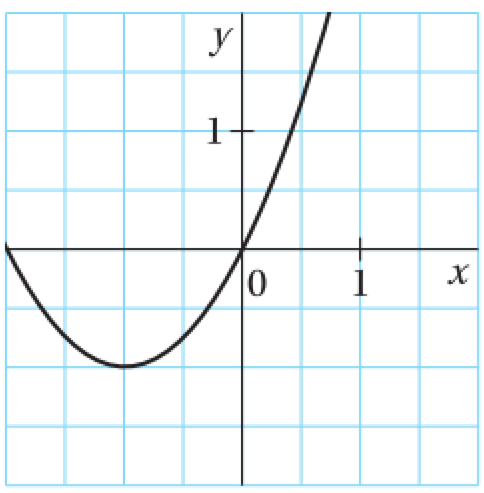


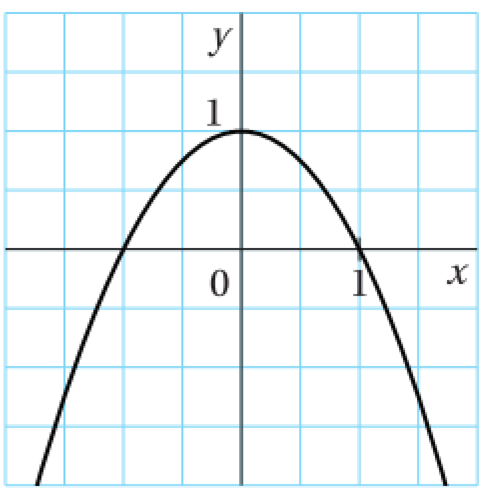
f is dalend in a	f is stijgend in a	f heeft een maximum in a
$f'(a) > 0$	$f'(a) = 0$	$f'(a) < 0$

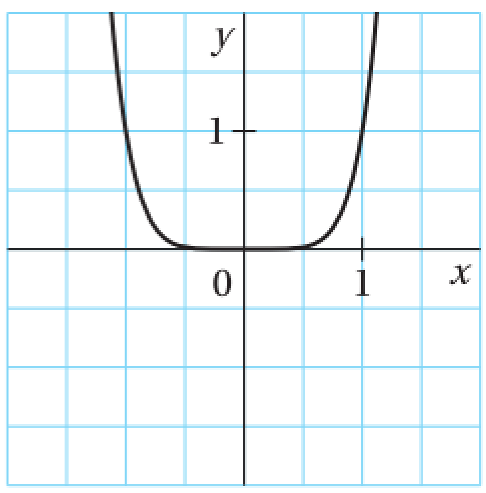
4

Verbind elke grafiek van de functie f met de voorwaarden waaraan de functiewaarden van de afgeleide functie f' voldoen.





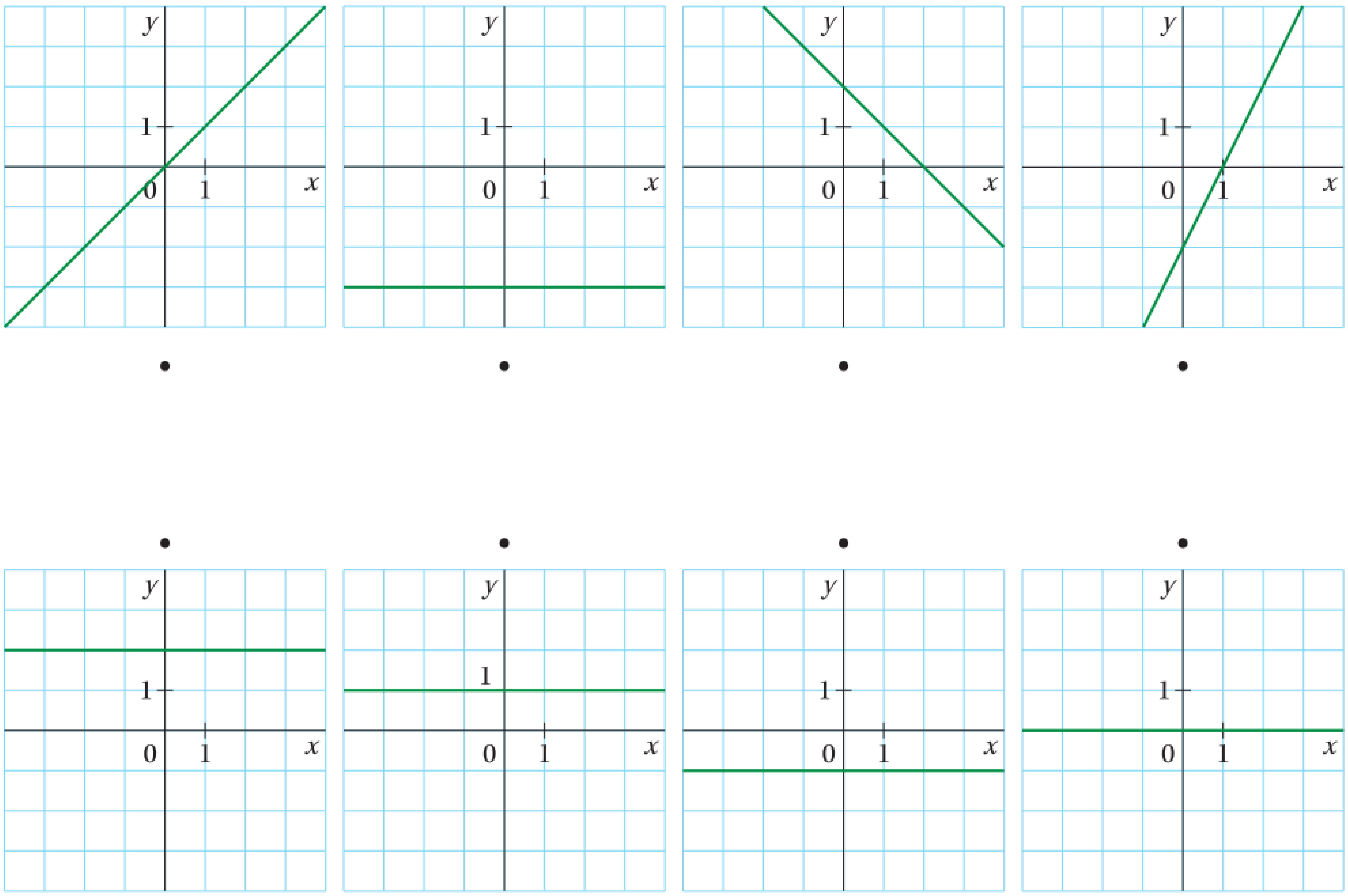




$f'(0) = 0$ $f'(1) < 0$ $f'(-1) > 0$	$f'(0) = 0$ $f'(1) < 0$ $f'(-1) < 0$	$f'(0) = 0$ $f'(1) > 0$ $f'(-1) < 0$	$f'(0) > 0$ $f'(1) > 0$ $f'(-1) = 0$

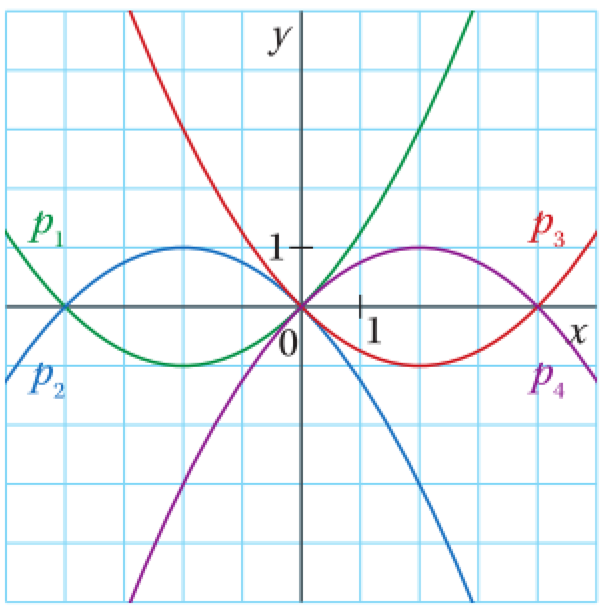
5

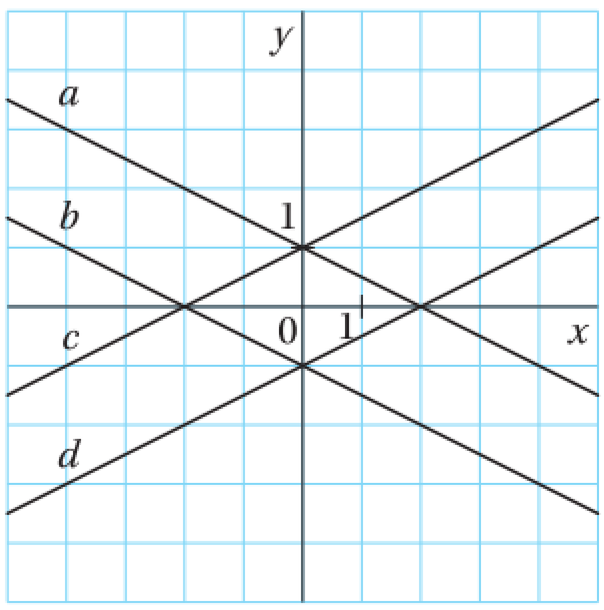
Verbind elke grafiek uit de bovenste rij met de bijbehorende hellingsgrafiek uit de onderste rij.



6

De gegeven grafieken van tweedegraadsfuncties zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de x-as, de y-as of de oorsprong. De grafieken van de bijbehorende hellingsfuncties zijn rechten. Welke rechte behoort bij welke parabool? Schrijf de benamingen van de rechten in de passende vakjes.



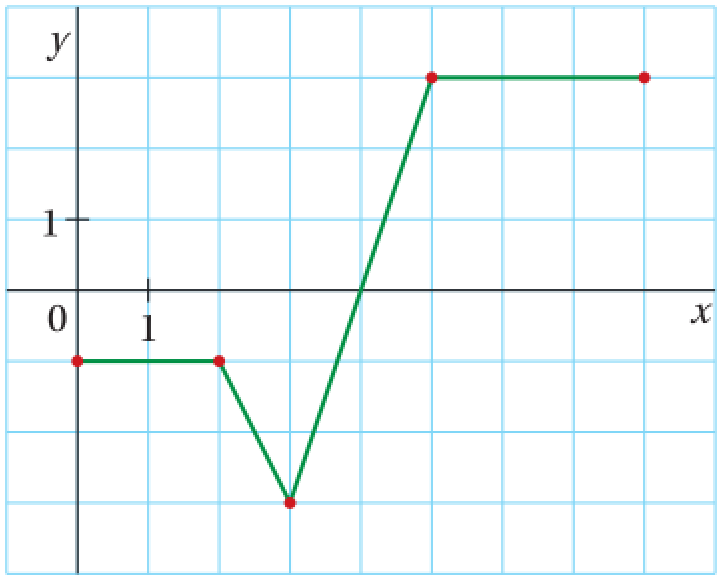


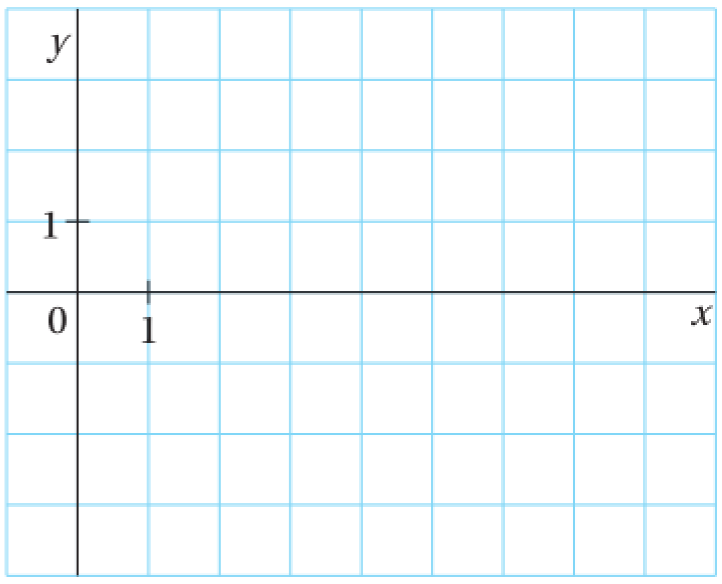
p_1		p_2		p_3		p_4	

7

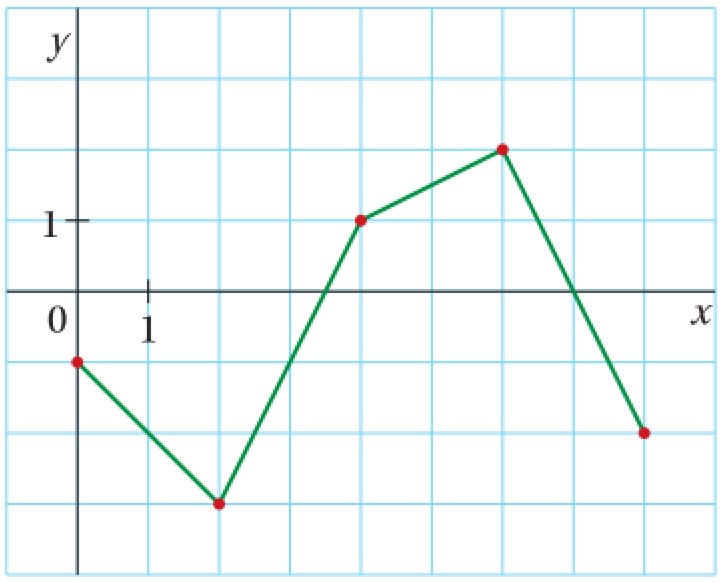
Teken de hellingsgrafiek.

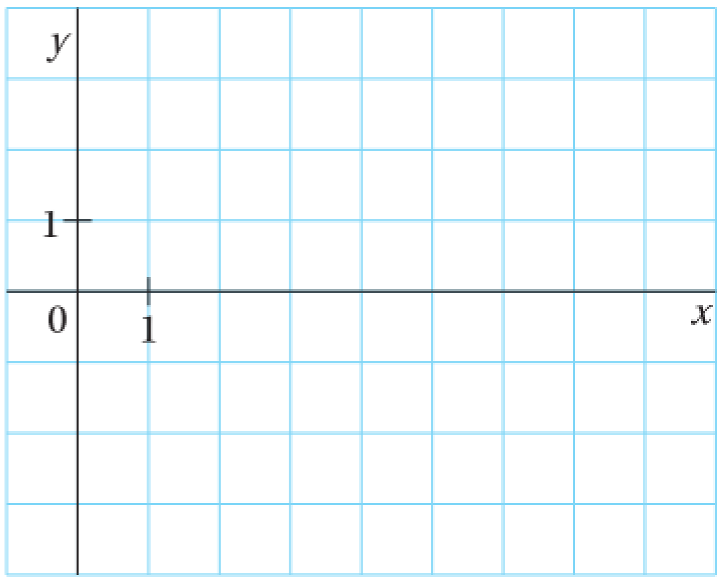
1



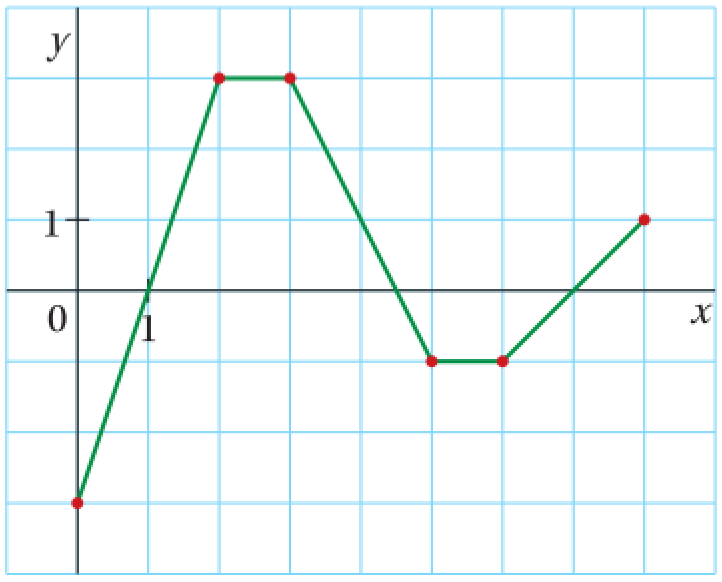


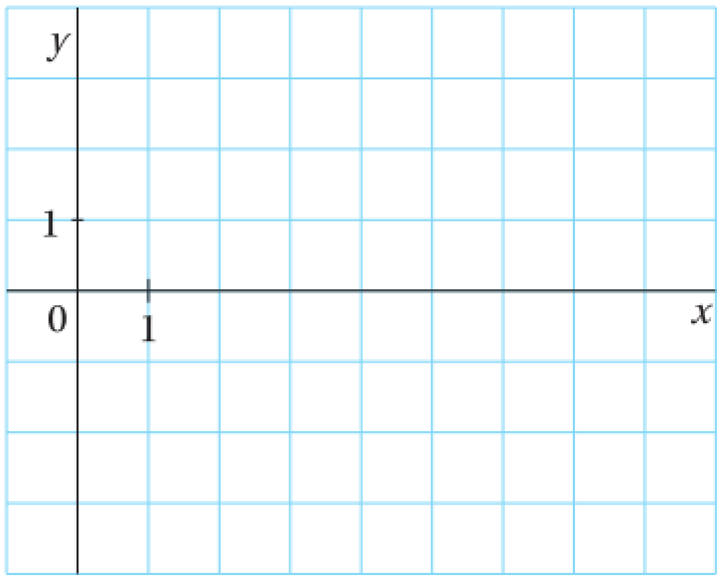
2



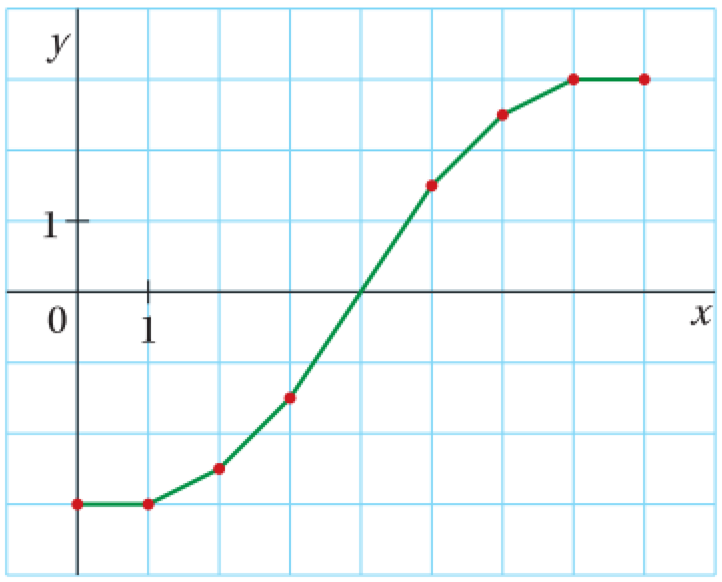


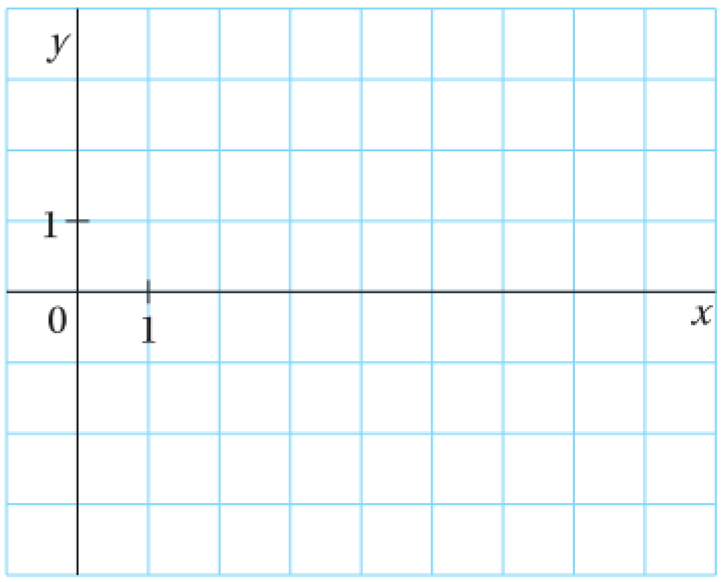
3





4





8

Gegeven is de functie $f(x)=x^3$.

1 Toon aan dat $f'(x)=3x^2$.

$f'(x)=$	**formule afgeleide functie**
$=$	**$f(x)=x^3$**
$=$	**$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$**
$=$	**tegengestelde termen weglaten**
$=$	**Δx afzonderen**
$=$	**breuk vereenvoudigen**
$=$	**$\Delta x \to 0$**

2 Bereken de helling van de grafiek in de punten A, B en C.

$A(1, f(1))$ helling in $A =$ ....

$B(3, f(3))$ helling in $B =$ ....

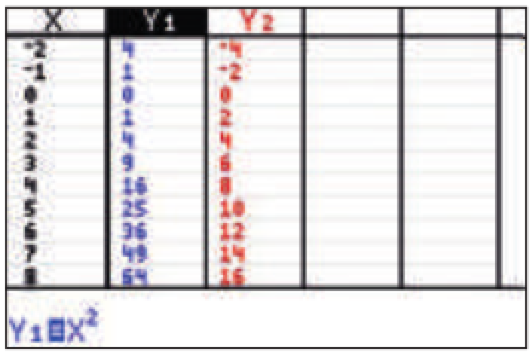
$C(-2, f(-2))$ helling in $C =$ ....

Afgeleiden van machtsfuncties

9 Instap

Gegeven zijn tabellen van zes machtsfuncties. In de X-kolom staan enkele originelen. De Y_1-kolom toont de functiewaarden en de Y_2-kolom de functiewaarden van de bijbehorende afgeleide functie.

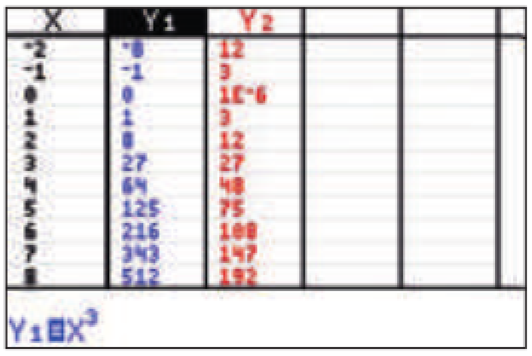
$f(x) = x^2$



X	Y1	Y2
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6
4	16	8
5	25	10
6	36	12
7	49	14
8	64	16

Y1=X²

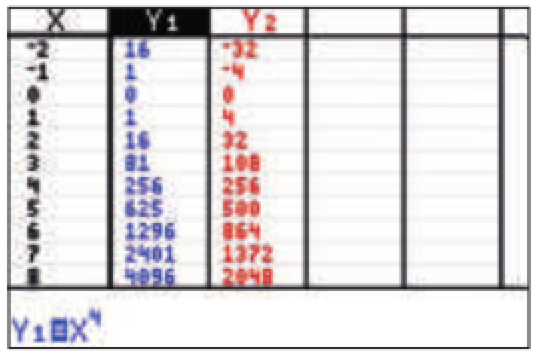
$f(x) = x^3$



X	Y1	Y2
-2	-8	12
-1	-1	3
0	0	1E-6
1	1	3
2	8	12
3	27	27
4	64	48
5	125	75
6	216	108
7	343	147
8	512	192

Y1=X³

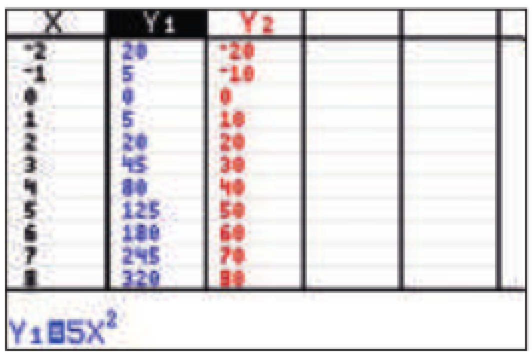
$f(x) = x^4$



X	Y1	Y2
-2	16	-32
-1	1	-4
0	0	0
1	1	4
2	16	32
3	81	108
4	256	256
5	625	500
6	1296	864
7	2401	1372
8	4096	2048

Y1=X⁴

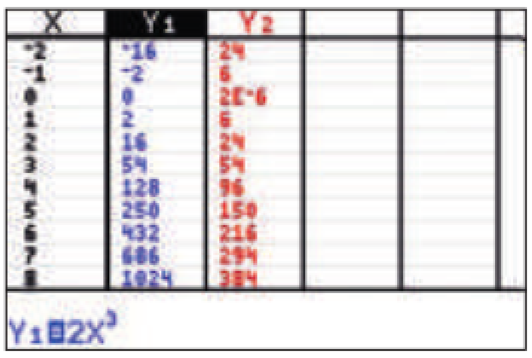
$f(x) = 5x^2$



X	Y1	Y2
-2	20	-20
-1	5	-10
0	0	0
1	5	10
2	20	20
3	45	30
4	80	40
5	125	50
6	180	60
7	245	70
8	320	80

Y1=5X²

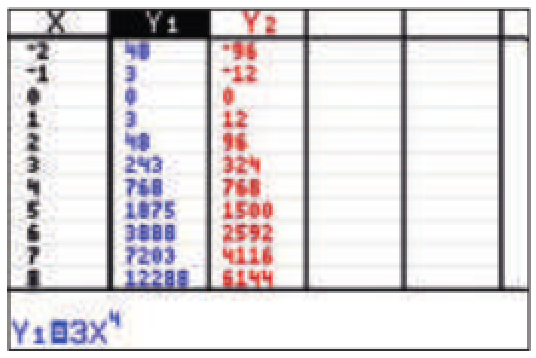
$f(x) = 2x^3$



X	Y1	Y2
-2	-16	24
-1	-2	6
0	0	2E-6
1	2	6
2	16	24
3	54	54
4	128	96
5	250	150
6	432	216
7	686	294
8	1024	384

Y1=2X³

$f(x) = 3x^4$



X	Y1	Y2
-2	48	-96
-1	3	-12
0	0	0
1	3	12
2	48	96
3	243	324
4	768	768
5	1875	1500
6	3888	2592
7	7203	4116
8	12288	6144

Y1=3X⁴

1 Verbind elke functie met de bijbehorende afgeleide functie. Gebruik de tabellen.

$f(x) = x^2$ •	• $f'(x) = 10x$
$f(x) = x^3$ •	• $f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^4$ •	• $f'(x) = 6x^2$
$f(x) = 5x^2$ •	• $f'(x) = 12x^3$
$f(x) = 2x^3$ •	• $f'(x) = 2x$
$f(x) = 3x^4$ •	• $f'(x) = 4x^3$

2 Welk verband bestaat er tussen de graad van een functie en de graad van de afgeleide functie?

....

3 Hoe kunnen we de coëfficiënt in het voorschrift van de afgeleide functie berekenen?

....

4 Bereken met de kennis verworven uit de voorgaande antwoorden de afgeleide functie van:

a $f(x) = x^5$

$f'(x) =$ ....

b $f(x) = 7x^5$

$f'(x) =$ ....

Machtsfuncties met natuurlijke exponenten afleiden

Met de formule voor de afgeleide functie kunnen we de afgeleide functie van $f(x) = x^n$ met n een natuurlijk getal berekenen. We verkrijgen:

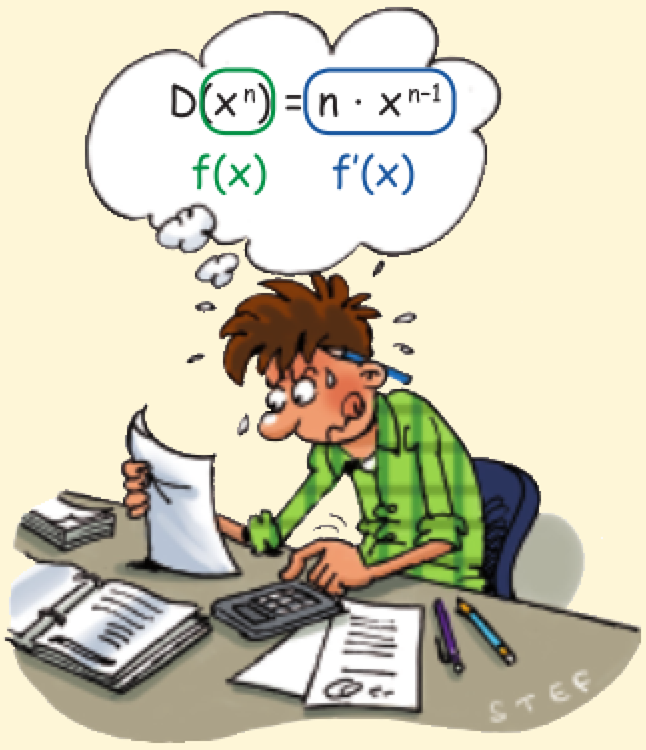
$f(x) = 1$	$f'(x) = 0$	$x^0 = 1$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$x^1 = x$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	
$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$	
...	...	
$\mathbf{f(x) = x^n}$	$\mathbf{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}$

Rekenregel voor afgeleide van een machtsfunctie

De afgeleide van x^n is n maal x^{n-1}.

We schrijven: $\mathbf{D(x^n) = n \cdot x^{n-1}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

De letter 'D' staat voor het Latijnse woord derivatio, wat afgeleide betekent.



Voorbeelden

$D(1) = 0$

$D(x) = 1$

$D(x^2) = 2x$

$D(x^8) = 8x^7$

$D(x^{2020}) = 2020x^{2019}$

Veelvoudregel

Bij het afleiden van een product mogen we een constante factor vooropzetten.

$$D(c \cdot f(x)) = c \cdot Df(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

De machtsfunctie $g(x) = 2x^5$ kunnen we beschouwen als het tweevoud van de functie $f(x) = x^5$.

Met de veelvoudregel berekenen we de afgeleide van de functie $g(x) = 2x^5$.

$D(2x^5) = 2 \cdot D(x^5)$ — veelvoudregel

$= 2 \cdot 5x^4$ — afgeleide van een machtsfunctie

$= 10x^4$

De afgeleide functie van $g(x) = 2x^5$ is $g'(x) = 10x^4$.

Voorbeelden

$D(4x^3) = 4 \cdot D(x^3) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$

$D(12x) = 12 \cdot D(x) = 12 \cdot 1 = 12$

$D(-4x^5) = -4 \cdot D(x^5) = -4 \cdot 5x^4 = -20x^4$

Rekenregel voor afgeleide van een constante functie

De grafiek van een constante functie $f(x) = c$ is een horizontale rechte. De helling van deze rechte is in elk punt nul. We verkrijgen:

$f(x) = c \qquad f'(x) = 0$

De afgeleide van een constante is nul.

$$\mathbf{D(c) = 0} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeelden

$D(2) = 0$

$D(-6) = 0$

10

Bereken.

1. $D(-7x) =$ ....
2. $D(3x^5) =$ ....
3. $D(-7x^4) =$ ....
4. $D(0{,}3x^3) =$ ....
5. $D\left(-\frac{1}{4}\right) =$ ....
6. $D(8x^7) =$ ....
7. $D(-2{,}3x) =$ ....
8. $D(-5) =$ ....
9. $D(4{,}1x^3) =$ ....
10. $D\left(\frac{3}{2}x^4\right) =$ ....

11

Vul de tabel in.

	functie	punt A	afgeleide functie	helling in A
1	$f(x) = x^3$	$(5, f(5))$	....	....
2	$f(x) = 0{,}5x^4$	$(-2, f(-2))$	....	....
3	$f(x) = -0{,}2x^5$	$(3, f(3))$	....	....
4	$f(x) = 0{,}75x^4$	$(1, f(1))$	....	....
5	$f(x) = 2x^6$	$(-1, f(-1))$	....	....

12

Gegeven is een machtsfunctie *g* van de vierde graad.

Als *g* de afgeleide functie is van *f*, dan is de graad van *f* gelijk aan

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5

Omcirkel het juiste antwoord.

13

Omcirkel het juiste antwoord.

$D(-3^2) =$

(A) –9 **(B)** –6 **(C)** 0 **(D)** 6 **(E)** 9

14

Gegeven zijn de formules:

$V = \dfrac{\pi r^3}{3}$ **volume vierde deel bol**

$A = \pi r^2$ **oppervlakte cirkel**

$p = 2\pi r$ **omtrek cirkel**

Toon aan dat $D(V) = A$ en $D(A) = p$.

....

....

15

Gegeven is $g(x) = c \cdot f(x)$ met $c \in \mathbb{R}$.

Toon met de formule voor de afgeleide functie aan dat $g'(x) = c \cdot f'(x)$.

$g'(x) =$ .... **formule afgeleide functie**

$=$ .... **g(x) = c · f(x)**

$=$ .... **gemeenschappelijke factor c afzonderen**

$=$ .... **constante factor vooropzetten bij limiet**

$=$ .... **formule afgeleide functie**

▶ Afgeleiden van veeltermfuncties

16 Instap

Gegeven zijn tabellen van de functies f, g en h. In de X-kolom staan enkele originelen. De Y1-kolom toont de functiewaarden en de Y2-kolom de functiewaarden van de bijbehorende afgeleide functie.

$f(x) = x^3$

X	Y1	Y2
-2	-8	12
-1	-1	3
0	0	1E-6
1	1	3
2	8	12
3	27	27
4	64	48
5	125	75
6	216	108
7	343	147
8	512	192

Y1=X³

$g(x) = 5x$

X	Y1	Y2
-2	-10	5
-1	-5	5
0	0	5
1	5	5
2	10	5
3	15	5
4	20	5
5	25	5
6	30	5
7	35	5
8	40	5

Y1=5X

$h(x) = ?$

X	Y1	Y2
-2	-18	17
-1	-6	8
0	0	5
1	6	8
2	18	17
3	42	32
4	84	53
5	150	80
6	246	113
7	378	152
8	552	197

Y1=?

1 Welk verband bestaat er tussen de functiewaarden $f(x)$, $g(x)$ en $h(x)$?

....

2 Wat is het voorschrift van de functie h?

....

3 Bereken de afgeleide functie van $f(x) = x^3$ en van $g(x) = 5x$.

....

4 Welk verband bestaat er tussen de functiewaarden $f'(x)$, $g'(x)$ en $h'(x)$?

....

5 Wat is het functievoorschrift van de afgeleide functie h'?

....

Veeltermfuncties afleiden

Een veeltermfunctie kunnen we beschouwen als een som van machtsfuncties.

Somregel

De afgeleide van een som is de som van de afgeleiden.

$$D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$$

De veeltermfunctie $h(x) = 3x^2 - 5x$ kunnen we beschouwen als de som van de machtsfuncties $f(x) = 3x^2$ en $g(x) = -5x$.

Met de somregel berekenen we de afgeleide van de functie $h(x) = 3x^2 - 5x$.

$D(3x^2 - 5x) = D(3x^2) + D(-5x)$ **somregel**

$= 3 \cdot D(x^2) - 5 \cdot D(x)$ **veelvoudregel**

$= 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1$

$= 6x - 5$

De afgeleide van de veeltermfunctie $h(x) = 3x^2 - 5x$ is de veeltermfunctie $h'(x) = 6x - 5$ waarvan de graad één lager is.

Voorbeelden

$D(6x - 5) = D(6x) + D(-5) = 6 \cdot D(x) + 0 = 6 \cdot 1 = 6$

$D(2x^2 + 5x - 9) = D(2x^2) + D(5x) + D(-9) = 2 \cdot D(x^2) + 5 \cdot D(x) + 0 = 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 4x + 5$

17

Bereken.

1 $D(2x - 3) =$ ....

2 $D\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) =$ ....

3 $D(4x^2 - 7x + 1) =$ ....

4 $D\left(x^3 - x^2 + \frac{3}{5}x + 1\right) =$ ....

5 $D(x^3 - 2x^2 - 5) =$ ....

6 $D\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\right) =$ ....

7 $D(7x^4 + 3x^3 - x - 1) =$ ....

8 $D\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right) =$ ....

9 $D(-0{,}25x^2 + 1{,}75x - 1) =$ ....

10 $D\left(\frac{5x^4}{2} - \frac{x}{7} + \frac{1}{3}\right) =$ ....

11 $D(1{,}8x^5 - 1{,}5x^3 + 1{,}2) =$ ....

12 $D\left(\frac{2x^3}{9} - \frac{5x^2}{6} - \frac{4}{7}x\right) =$ ....

....

18

Vul de tabel in.

	functie	punt A	afgeleide functie	helling in A
1	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+2x+1$	$(2, f(2))$	....	....
2	$f(x)=x^4+2x^2+1$	$(-1, f(-1))$	....	....
3	$f(x)=2x^3-7{,}25$	$(1, f(1))$	....	....
4	$f(x)=\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{6}x^3+1$	$(-2, f(-2))$	....	....

19

Werk het product uit en bereken daarna de afgeleide.

1 $D((x-5)(2x+3))=$ ....

2 $D((2x+7)(3x+4))=$ ....

3 $D((3-x^2)(5+x^2))=$ ....

4 $D((x-1)(x+1)(x-4)(x+4))=$ ....

....

20

Gegeven is de functie $f(x)=x^2-5x+4$.

1 Bereken het voorschrift van de afgeleide functie.

$f'(x)=$ ....

2 De grafiek van f heeft een snijpunt met de y-as en twee snijpunten met de x-as. Bereken de helling in elk van deze punten.

....

....

....

....

....

21

Bepaal drie functievoorschriften van een veeltermfunctie f als $f'(x)$ gegeven is.

1 $f'(x) = 1$

$f(x) =$ .... $f(x) =$ .... $f(x) =$ ....

2 $f'(x) = 2x$

$f(x) =$ .... $f(x) =$ .... $f(x) =$ ....

3 $f'(x) = 3x^2$

$f(x) =$ .... $f(x) =$ .... $f(x) =$ ....

4 Welke term mag in de functievoorschriften willekeurig gekozen worden? Waarom?

....

....

22

Maak met de vijftien veeltermfuncties rijen waarbij elke functie de afgeleide functie is van de voorgaande. Elke functie mag hoogstens eenmaal gebruikt worden.

(A) $f(x) = 24x$	**(B)** $f(x) = 2$	**(C)** $f(x) = -12x^2$
(D) $f(x) = -4x^3$	**(E)** $f(x) = x^4 + 2x^2$	**(F)** $f(x) = 0$
(G) $f(x) = 2x + 2$	**(H)** $f(x) = x^2 + 2x$	**(I)** $f(x) = 4x^3 + 4x$
(J) $f(x) = x^4 + 1$	**(K)** $f(x) = 24$	**(L)** $f(x) = -24x$
(M) $f(x) = 12x^2 + 4$	**(N)** $f(x) = 4x^3$	**(O)** $f(x) = -x^4 + 2$

1 Wat is de langste rij die er in verborgen zit?

....

2 Maak met de overblijvende functies twee rijen van minstens drie elementen.

....

3 Welke twee functies blijven over?

....

23

Omcirkel het juiste antwoord.

1 $D(-3x+2)^2 =$

(A) -3 **(B)** $-6x$ **(C)** $18x$ **(D)** $18x-12$ **(E)** $18x+12$

....

2 $-(1-x)\cdot D(1-2x) =$

(A) $1-x$ **(B)** $-1+x$ **(C)** $2-2x$ **(D)** $2x-1$ **(E)** $-2x$

....

3 $-2\cdot D(x^2+2x)+1 =$

(A) $-4x-4$ **(B)** $-4x-3$ **(C)** $-4x+1$ **(D)** $-2x+1$ **(E)** $-2x$

....

24

Gegeven is $f(x) = g(x) + h(x)$.
Toon met de formule voor de afgeleide functie aan dat $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

$f'(x) =$	**formule afgeleide functie**
$=$	**$f(x) = g(x) + h(x)$**
$=$	**haakjes uitwerken**
$=$	**termen van dezelfde functies groeperen**
$=$	**breuk splitsen in een som van breuken**
$=$	**limiet van een som is som van limieten**
$=$	**formule afgeleide functie**

Afgelegde weg en snelheid

Gegeven is de **plaatsfunctie** $s(t)$ die de rechtlijnige beweging van een punt P beschrijft dat een afstand s aflegt in een tijd t.

De snelheid v van het punt P op het ogenblik t kunnen we bepalen met de formule:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

zie pagina 198

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$= s'(t)$$

formule afgeleide functie

De **snelheidsfunctie** v is gelijk aan de afgeleide van de plaatsfunctie s.

We schrijven: $\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$

We zeggen: **De snelheid is de afgeleide van de afgelegde weg.**

Voorbeeld

De afgelegde weg van een Formule 1-piloot gedurende de eerste 5 seconden kunnen we beschrijven met de plaatsfunctie $s(t) = 4t^2$. s in meter

We berekenen de snelheid van de Formule 1-piloot na 5 seconden.

De snelheid wordt beschreven door de afgeleide functie van de plaatsfunctie:

$v(t) = s'(t) = 8t$ $\quad$ $D(4t^2) = 8t$

De snelheid na 5 seconden is de functiewaarde van de snelheidsfunctie in 5:

$v(5) = s'(5) = 8 \cdot 5 = 40$

Na 5 seconden is de snelheid 40 m/s of 144 km/h. $\quad$ $40 \cdot 3{,}6 = 144$

25

Van een rechtlijnig bewegend voorwerp is de plaatsfunctie gegeven. Bepaal de snelheidsfunctie.

1 $s(t) = 5t + 2$ $\quad$ $v(t) =$ ....

2 $s(t) = t^2 + t - 3$ $\quad$ $v(t) =$ ....

3 $s(t) = t^3 - 3t^2 + t$ $\quad$ $v(t) =$ ....

4 $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ $\quad$ $v(t) =$ ....

5 $s(t) = s_0 + v_0 t$ $\quad$ $v(t) =$ ....

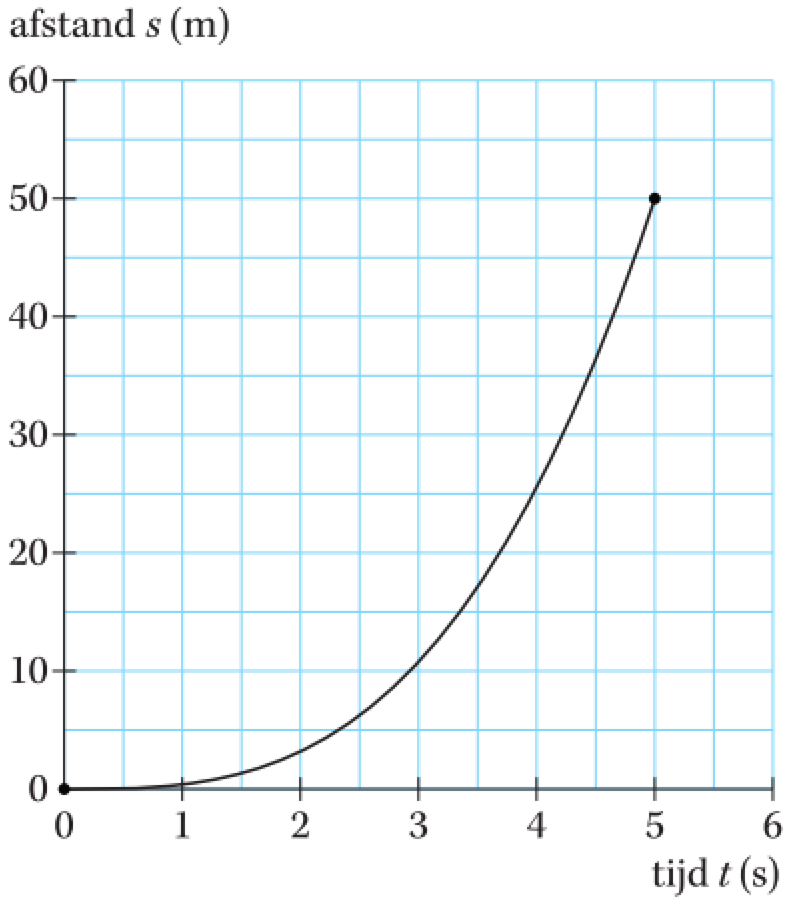
6 $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ $\quad$ $v(t) =$ ....

26

Lewis Hamilton, een Britse autocoureur, start met zijn Mercedes vanuit pole position in de Grote Prijs van België op het circuit van Francorchamps. De versnellende beweging van zijn racewagen tijdens de eerste 5 seconden kunnen we beschrijven met:

$s(t) = 0{,}4t^3$

s : afgelegde weg in m
t : tijd na startschot in s



Hoe snel rijdt de racewagen 5 seconden na de start? Druk de snelheid uit in km/h.

....

....

....

....

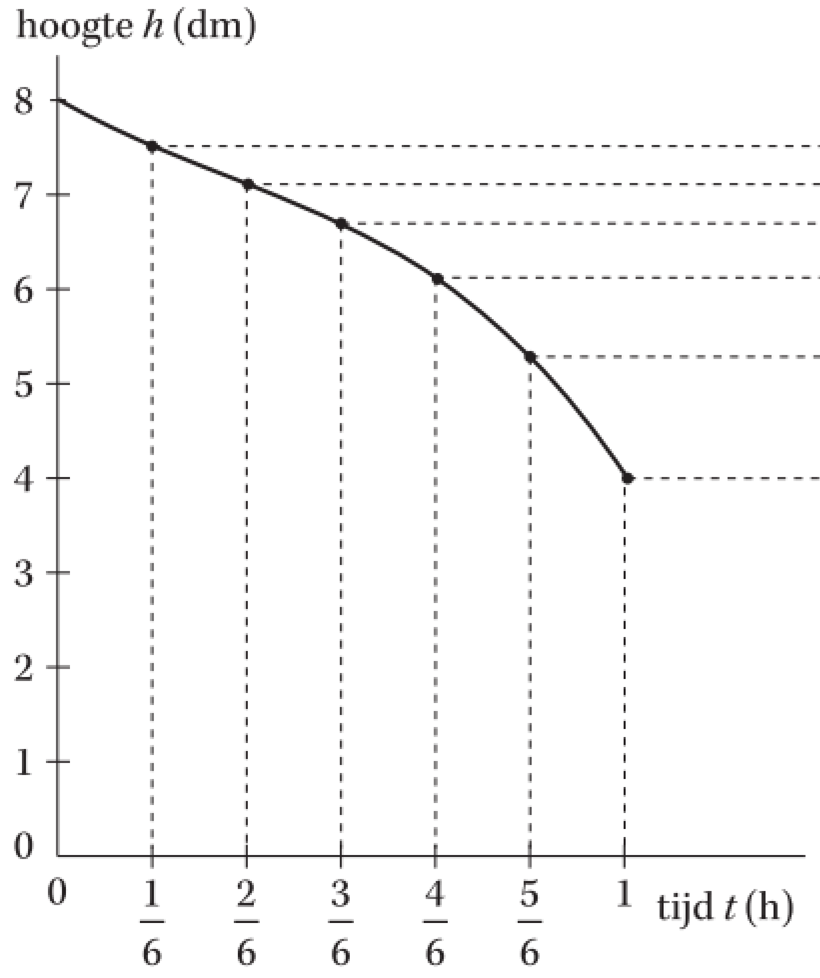


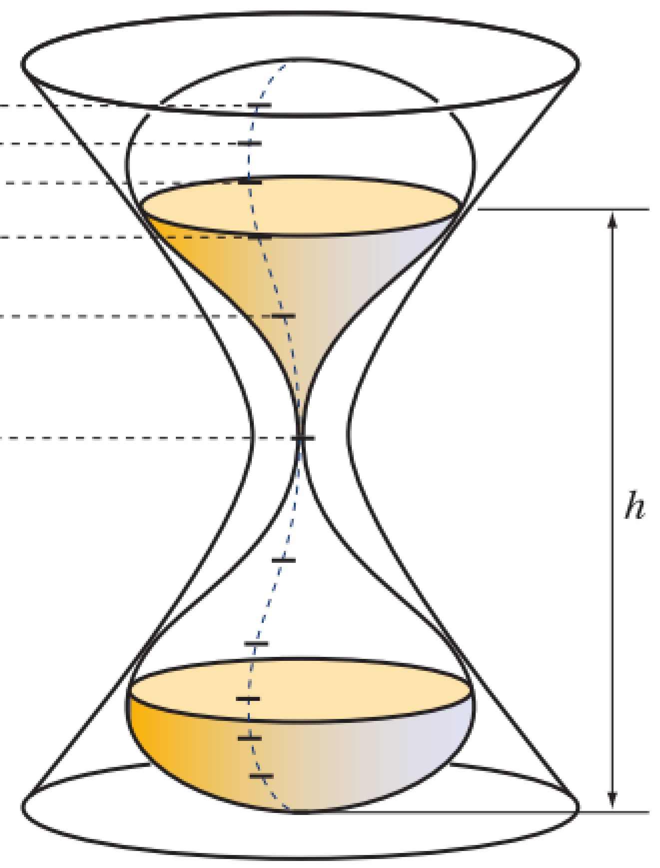
27

Een decoratieve glazen zandloper is gevuld met een felgekleurde vloeistof. Het duurt precies één uur om de zandloper te laten leegdruppelen. Op de glazen wand van de zandloper staan merktekens die de leeglooptijd per tien minuten aangeven. Deze maatstrepen staan niet op gelijke tussenafstand, wat betekent dat het vloeistofoppervlak niet gelijkmatig daalt. De vloeistofhoogte in de bovenste lob van de zandloper wordt beschreven met:

$h(t) = -4{,}5t^3 + 4{,}05t^2 - 3{,}55t + 8$

h : hoogte vloeistofoppervlak in bovenste lob in dm
t : tijd na omkeren van de zandloper in uren





Volgens de wetten van de kinematica of de bewegingsleer kunnen we de daalsnelheid van het vloeistofoppervlak beschrijven met de afgeleide functie van de gegeven functie.

1 Bereken de daalsnelheid van de vloeistof na 6 minuten en na 30 minuten. Druk de snelheid uit in mm/min.

....

....

....

....

....

....

2 Op welk van beide tijdstippen daalt de vloeistof het snelst?

....

28

Vanaf een balkon blazen we met behulp van een blaaspijp een erwt verticaal omhoog. De hoogte van de erwt kan op elk tijdstip worden berekend met:

$h(t) = 24{,}5 + 19{,}6t - 4{,}9t^2$

h : hoogte in m
t : tijd in s

1 Vanaf welke hoogte wordt de erwt weggeblazen?

2 Wat is de snelheid van de erwt in functie van de tijd?

3 Met welke beginsnelheid wordt de erwt weggeblazen?

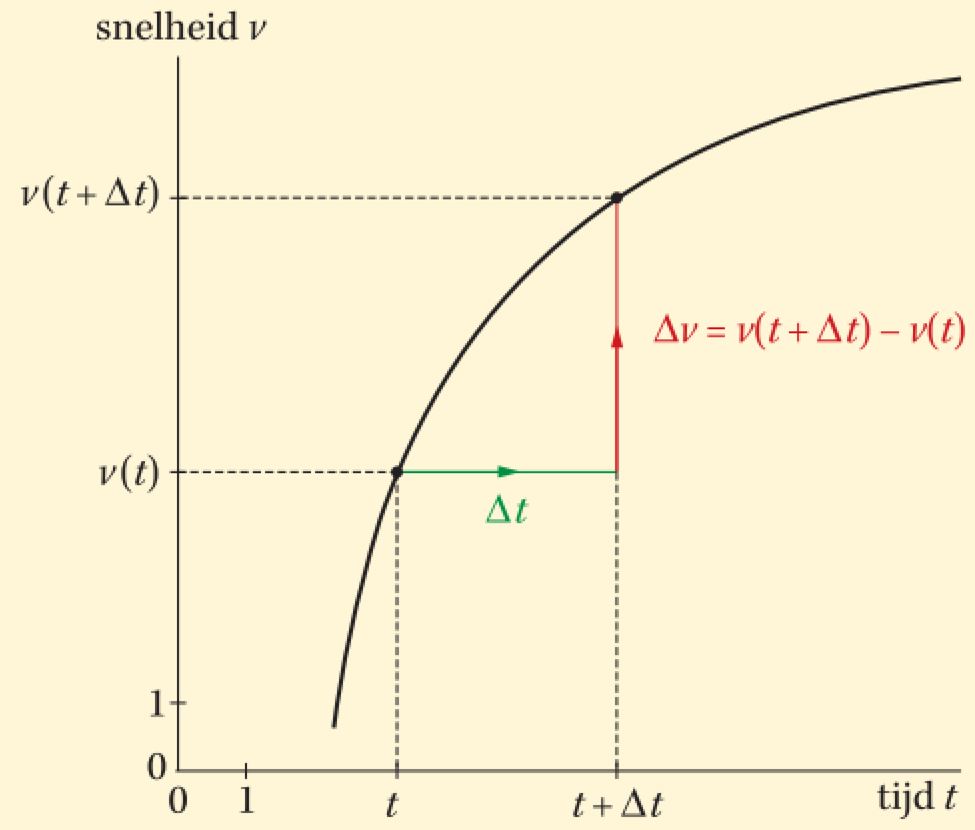
4 Welke hoogte bereikt de erwt?

5 Na hoeveel tijd valt de erwt op de grond?

6 Met welke daalsnelheid raakt de erwt de grond?

Snelheid en versnelling

De tijd-snelheidgrafiek geeft de verandering van de snelheid v over het tijdsinterval $[t, t+\Delta t]$.



Als Δt nadert tot 0, dan zal het differentiequotiënt $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ naderen tot de ogenblikkelijke verandering van v op het tijdstip t. In een tijd-snelheidgrafiek spreken we van de **ogenblikkelijke versnelling** of kortweg de **versnelling** op het tijdstip t. Stellen we de versnelling voor met het symbool a, dan is de formule voor de versnelling op het ogenblik t:

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \\ &= v'(t) \end{aligned}$$

De **versnellingsfunctie** a is gelijk aan de afgeleide van de snelheidsfunctie v.

We schrijven: $\boldsymbol{a(t) = v'(t)}$

We zeggen: **De versnelling is de afgeleide van de snelheid.**

Voorbeeld

De snelheid van een Formule 1-piloot gedurende de eerste 5 seconden kunnen we beschrijven met de snelheidsfunctie $v(t) = 8t$. **v in m/s**

We berekenen de versnelling van de Formule 1-piloot.

De versnelling wordt beschreven door de afgeleide functie van de snelheidsfunctie:

$a(t) = v'(t) = 8$ **D(8t) = 8**

Gedurende de eerste 5 seconden rijdt de Formule 1-piloot met een constante versnelling van 8 m/s^2.

29

Van een bewegend voorwerp is de snelheidsfunctie gegeven. Bepaal de versnellingsfunctie.

1 $v(t) = 5$ $a(t) =$ ....

2 $v(t) = 2t + 1$ $a(t) =$ ....

3 $v(t) = 3t^2 - 4t$ $a(t) =$ ....

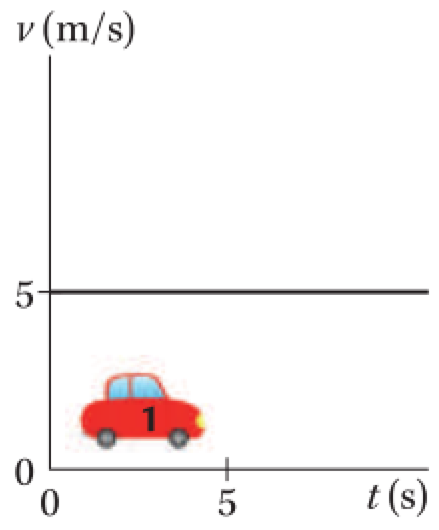
4 $v(t) = gt$ $a(t) =$ ....

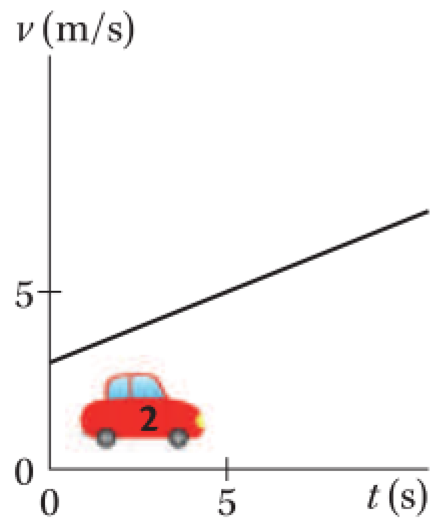
5 $v(t) = v_0$ $a(t) =$ ....

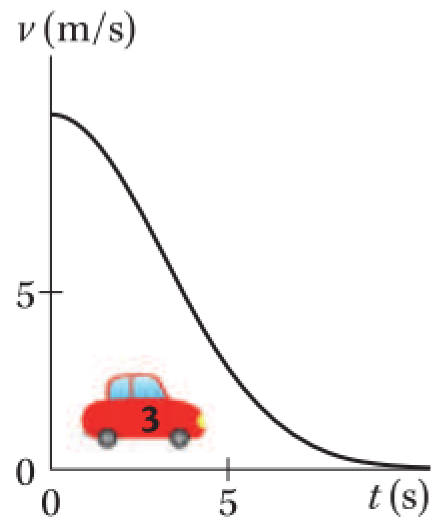
6 $v(t) = v_0 - gt$ $a(t) =$ ....

30

Van drie rijdende auto's is een snelheidsgrafiek gemaakt.







1 Welke auto heeft een eenparig versnelde beweging? Verklaar.

....

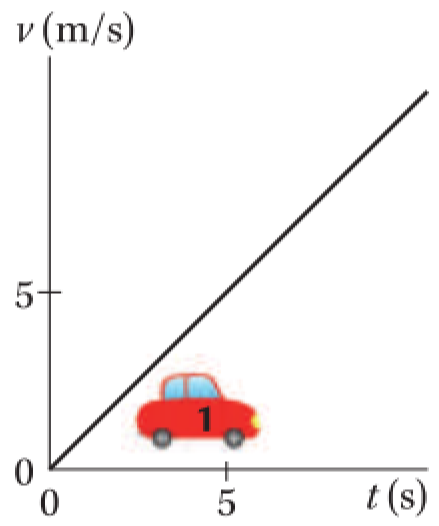
....

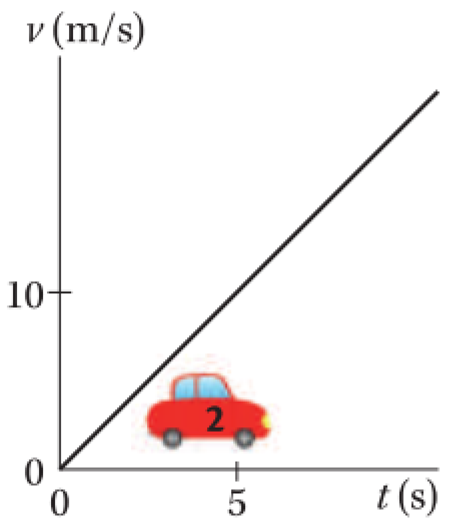
2 Beschrijf de beweging van de twee andere auto's.

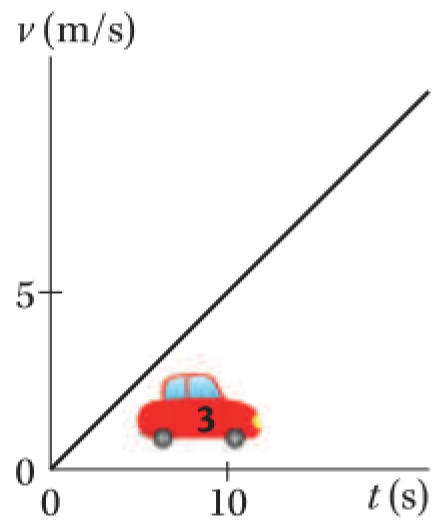
....

....

De drie auto's hebben nu de volgende snelheidsgrafiek.







3 Hebben de auto's een eenparige beweging of een eenparig versnelde beweging?

....

4 Bepaal de snelheidsfunctie van elke auto.

Auto 1: $v(t) =$ ....

Auto 2: $v(t) =$ ....

Auto 3: $v(t) =$ ....

5 Bepaal de versnelling van elke auto.

Auto 1: $a(t) =$ ....

Auto 2: $a(t) =$ ....

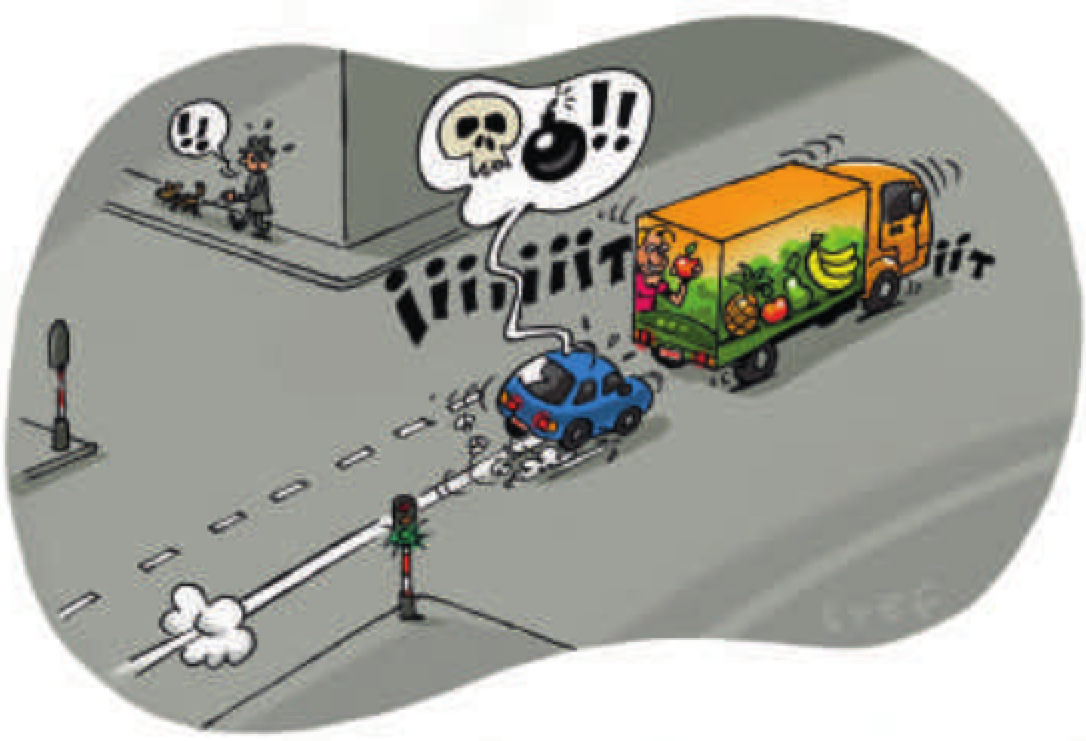
Auto 3: $a(t) =$ ....

31

Bij het overspringen van een stoplicht van rood naar groen, trekt een auto zeer snel op. Na enkele ogenblikken moet de auto vertragen omdat een vrachtwagen die voor hem rijdt plots stopt.
De afgelegde weg in meter van de auto in de eerste 10 seconden kunnen we beschrijven met de plaatsfunctie:

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2$$

s : afgelegde weg in m
t : tijd in seconden



1 Bepaal de snelheidsfunctie van de auto.

....

2 Bepaal de versnellingsfunctie van de auto.

....

3 Met welke versnelling trekt de auto op aan het stoplicht?

....

4 Op welk ogenblik begint de chauffeur af te remmen?

....

....

....

5 Wat is zijn snelheid op dat ogenblik?

....

....

6 Wat is de afgelegde weg op dat ogenblik?

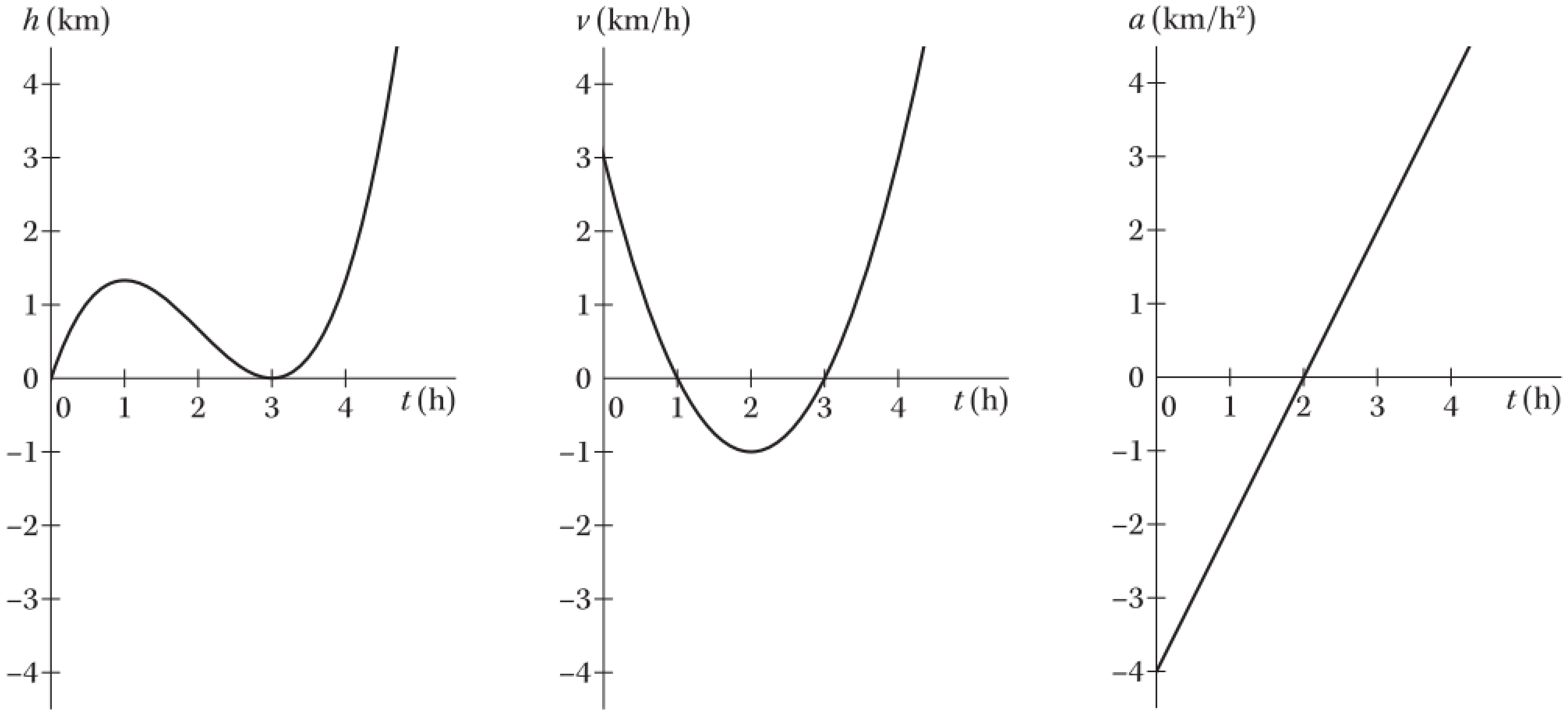
....

32

De hoogte van een heteluchtballon kunnen we uitdrukken in functie van de tijd:

$h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$ h : hoogte in km
t : tijd in uren

Op de grafieken lezen we de hoogte, de snelheid en de versnelling van de ballon gedurende de eerste vier uren af.



Beantwoord de vragen met een berekening en controleer elk antwoord op de grafiek.

1 Op welke hoogte is de ballon na een kwartier?

....

....

....

2 Wanneer begint de ballon te dalen?

3 Welke hoogte heeft de ballon op dat ogenblik?

4 Wanneer is de ballon terug op de begane grond?

5 Welke snelheid heeft de ballon na 4 uren?

6 Wanneer daalt de ballon met een snelheid van 1 km/h?

7 Wanneer is de versnelling van de ballon 0 km/h² ?

....

....

....

....

....

8 Hoe groot is de versnelling van de ballon na 3 uren?

....

....



Afgeleide van een functie in een origineel berekenen

We berekenen de afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in het origineel 3.

TEXAS INSTRUMENTS

Berekening met de optie nDeriv

In het menu MATH kiezen we de optie nDeriv. De afkorting Deriv staat voor derivatio en verwijst naar afgeleide van een functie.

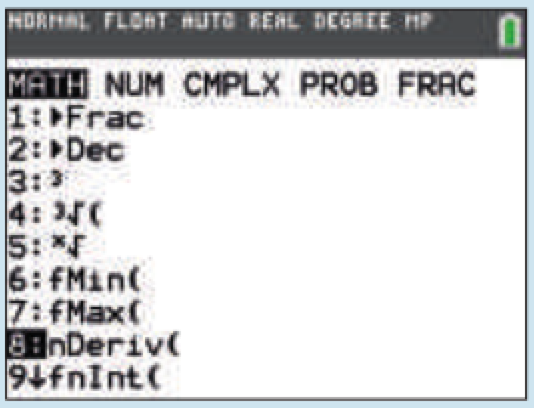
- [MATH] [8: nDeriv]

We kunnen ook de sneltoets F2 gebruiken.

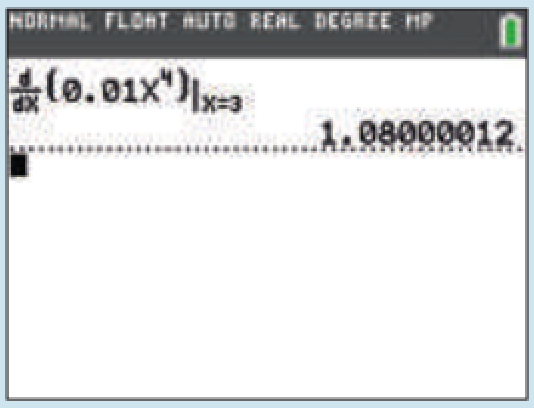
- [ALPHA] [F2] [3: nDeriv]

Om $f'(3)$ te berekenen, voeren we achtereenvolgens in: de variabele x, het functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$ en het origineel 3.

- x $0{,}01x^4$ [▶] [▶] 3 [ENTER]







Het symbool $\frac{d}{dx}$ is een andere notatie voor het symbool D. Tussen de ronde haakjes staat het functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$ en achter de verticale streep het origineel 3.

De afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in 3 is 1,08.

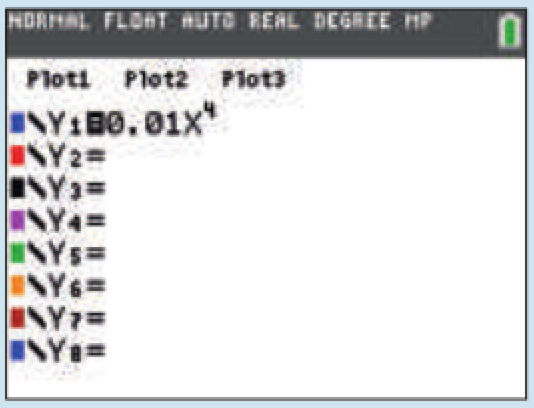
Berekening met de optie dy/dx uit het menu CALCULATE

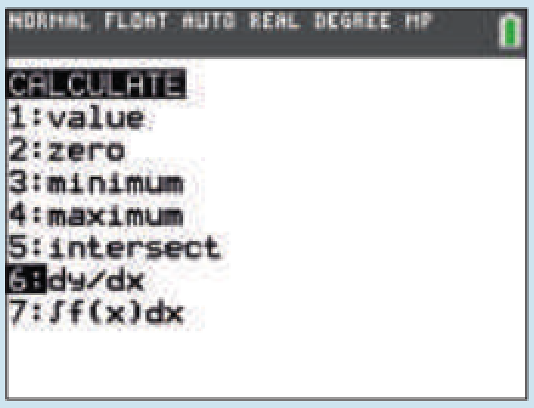
We voeren de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in. Daarna roepen we het rekenmenu CALCULATE op waarin we de optie dy/dx kiezen. Het symbool dy/dx staat voor afgeleide van een functie.

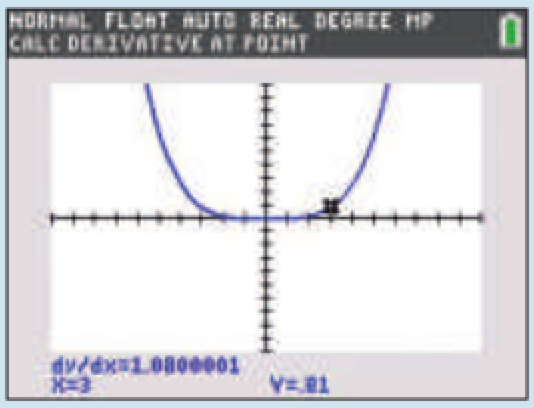
- [Y1=] $0{,}01x^4$ [2ND] [CALC]

In het grafiekvenster berekenen we $f'(3)$.

- [6: dy/dx] 3 [ENTER]







De letter 'y' in dy/dx verwijst naar het ingevoerde functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$.

De afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in 3 is 1,08.

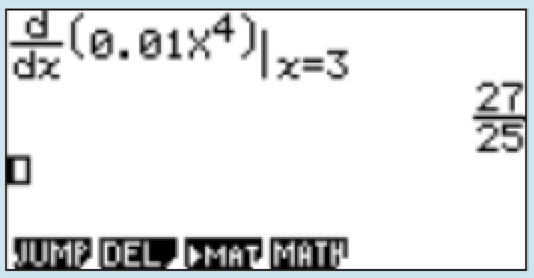
CASIO

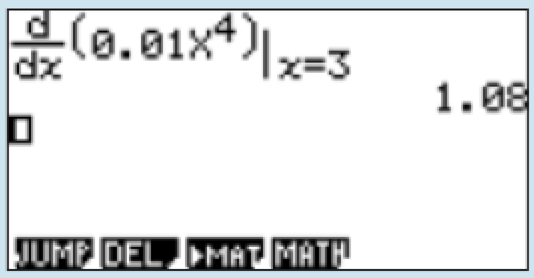
Berekening in het menu RUN·MAT

In het menu RUN·MAT roepen we het rekenmenu CALC op waarin we de optie d/dx kiezen.

Om $f'(3)$ te berekenen, voeren we achtereenvolgens het functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$ en het origineel 3 in.

- [MENU] [1: RUN·MAT] [OPTN] [F4: CALC] [F2: d/dx] $0{,}01x^4$ [▶] [▶] 3 [EXE] [F↔D]





Het symbool $\frac{\text{d}}{\text{dx}}$ is een andere notatie voor het symbool D. Tussen de ronde haakjes staat het functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$ en achter de verticale streep het origineel 3.

De afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in 3 is 1,08.

Berekening in het menu TABLE

In het menu TABLE voeren we de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in. Daarna roepen we het configuratiescherm op en stellen Derivative in op On. De benaming Derivative staat voor afgeleide functie.

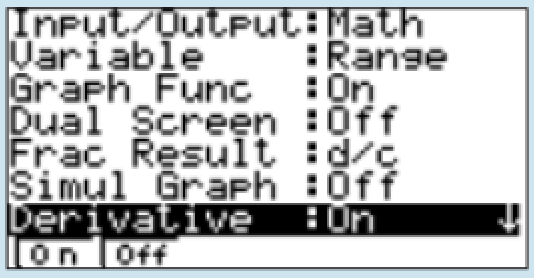
- [MENU] [5: TABLE] 0,01x^4 [EXE] [SHIFT] [SET UP] [▼: 6-maal] [F1: On]

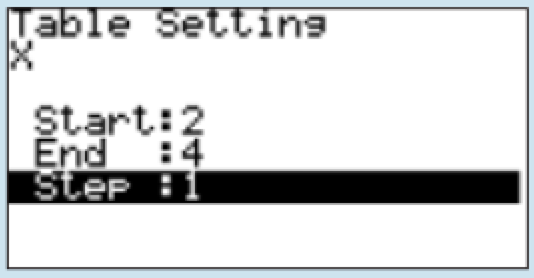
In het scherm Table Setting kiezen we tabelvariabelen in de omgeving van het origineel 3, bijvoorbeeld: startwaarde 2, eindwaarde 4 en stapgrootte 1.

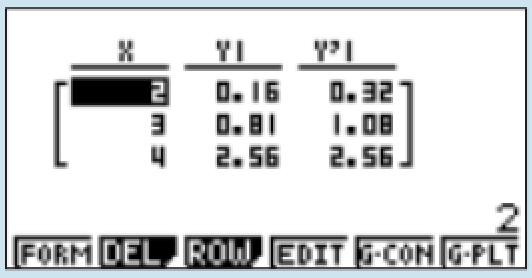
- [EXIT] [F5: SET] 2 [EXE] 4 [EXE] 1 [EXE]

We roepen de tabel op. In kolom Y'1 lezen we de functiewaarden van f' af.

- [EXIT] [F6: TABL]







De afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in 3 is 1,08.

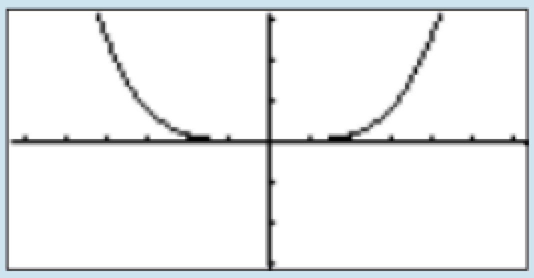
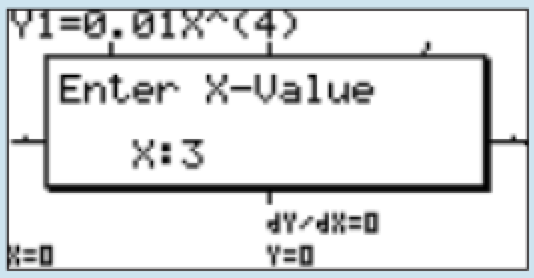
Berekening in het menu GRAPH

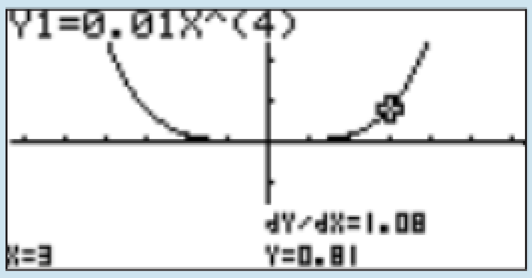
In het menu GRAPH is de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ opgeslagen omdat ze reeds ingevoerd is in het menu TABLE. In het configuratiescherm staat Derivative ingesteld op On. We tekenen de grafiek in het standaardkijkvenster.

- [MENU] [3: GRAPH] [F6: DRAW]

In het grafiekvenster bepalen we $f'(3)$.

- [SHIFT] [Trace] 3 [EXE]



De letter 'y' in dy/dx verwijst naar het ingevoerde functievoorschrift $f(x) = 0{,}01x^4$.

De afgeleide van de functie $f(x) = 0{,}01x^4$ in 3 is 1,08.

33

Bereken met ICT de afgeleide van f in het origineel a. Rond af op 2 decimalen.

1 $f(x) = -x^2 - 3x + 1$ $a = -3$ $f'(-3) =$ ....

2 $f(x) = x^3 - 2x + 5$ $a = 3$ $f'(3) =$ ....

3 $f(x) = x^4 - 9x^2$ $a = -1{,}5$ $f'(-1{,}5) =$ ....

4 $f(x) = 0{,}25x^5 - x + 0{,}25$ $a = 0$ $f'(0) =$ ....

5 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ $a = 0{,}5$ $f'(0{,}5) =$ ....

34

Bereken met ICT de helling van de grafiek van f in het gegeven punt.

1 $f(x) = x^2$ $A(2, f(2))$ $f'(2) =$ ....

2 $f(x) = -x^3$ $B(-1, f(-1))$ $f'(-1) =$ ....

3 $f(x) = 0{,}25x^3$ $C(3, f(3))$ $f'(3) =$ ....

4 $f(x) = -x^2 - 3x + 1$ $D(2, f(2))$ $f'(2) =$ ....

5 $f(x) = 6x^2 + 0{,}3x$ $E(5, f(5))$ $f'(5) =$ ....

6 $f(x) = 0{,}6x^2 + 3x - 4$ $F(-10, f(-10))$ $f'(-10) =$ ....

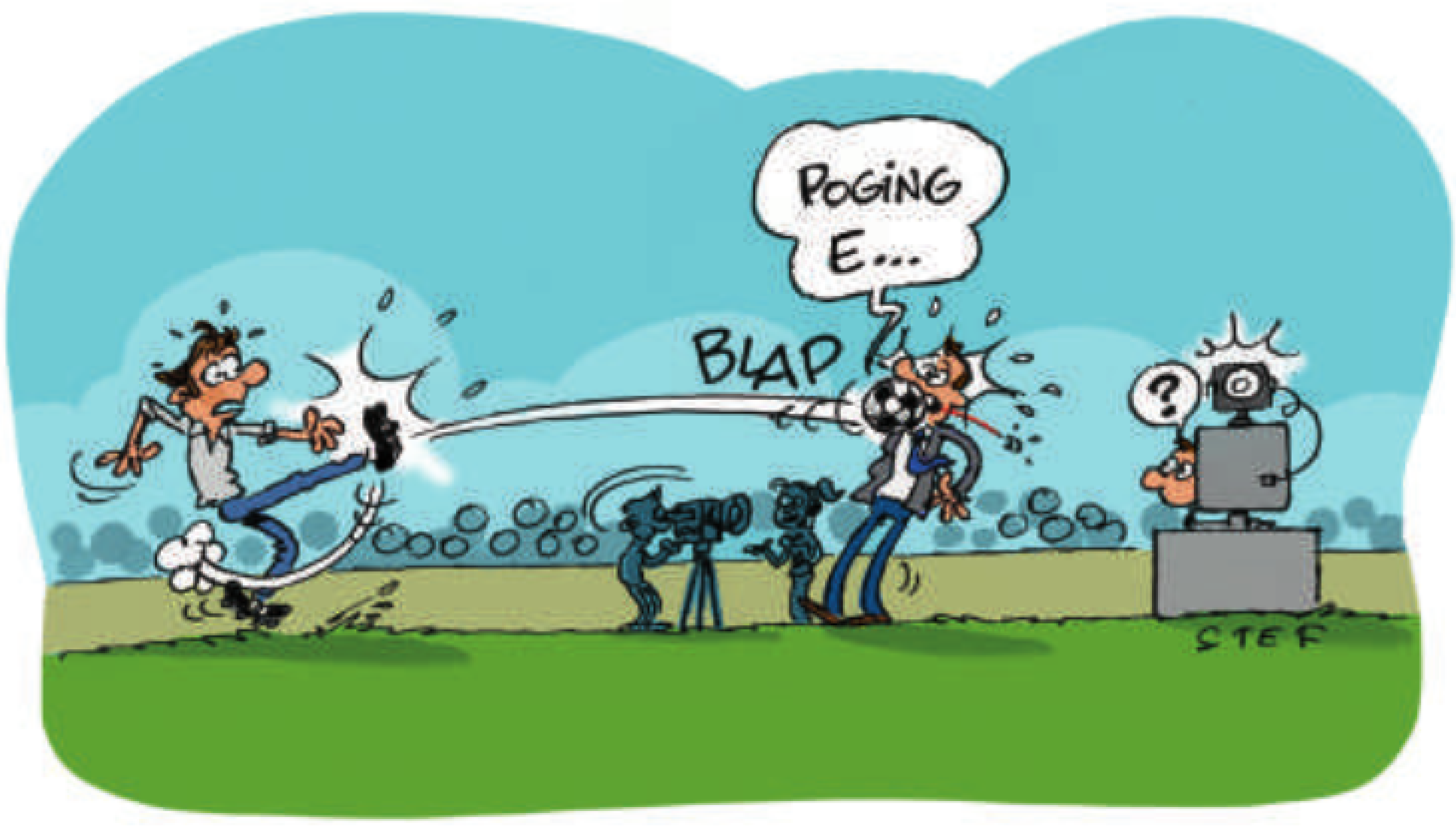
35

Bereken met ICT de helling van de grafiek van de machtsfunctie in de gegeven punten.

	functie	helling in				
		$A(-2, f(-2))$	$B(-1, f(-1))$	$C(0, f(0))$	$D(1, f(1))$	$E(2, f(2))$
1	$f(x) = -0{,}25x^6$	....	....	....	....	....
2	$f(x) = 0{,}3x^5$	....	....	....	....	....
3	$f(x) = 2{,}5x^4$	....	....	....	....	....
4	$f(x) = -1{,}25x^3$	....	....	....	....	....

36

Een sportkrant sponsort tijdens de vakantiemaanden een tv-quiz. Als schiftingsvraag die bij een eventuele gelijkheid van punten de winnaar zal aanduiden, moet elke deelnemer de hellingshoek raden waaronder de verst vliegende bal wordt weggetrapt.



Een bekende tv-presentator die deze klus moet klaren, krijgt vijf pogingen om zo ver mogelijk te trappen. Een computer met camera vertaalt de parabolische baan van elke weggetrapte bal in de volgende voorschriften.

POGING 1: $h(s) = -\frac{1}{6076}s(s-3472)$ h: hoogte in cm s: horizontale afstand in cm

POGING 2: $h(s) = -\frac{2}{11\,221}s(s-3472)$

POGING 3: $h(s) = -\frac{1}{7857}s(s-3492)$

POGING 4: $h(s) = -\frac{2}{18\,063}s(s-4014)$

POGING 5: $h(s) = -\frac{1}{4869}s(s-3246)$

Bereken met ICT het juiste antwoord op de schiftingsvraag.

....

....

....

....

....

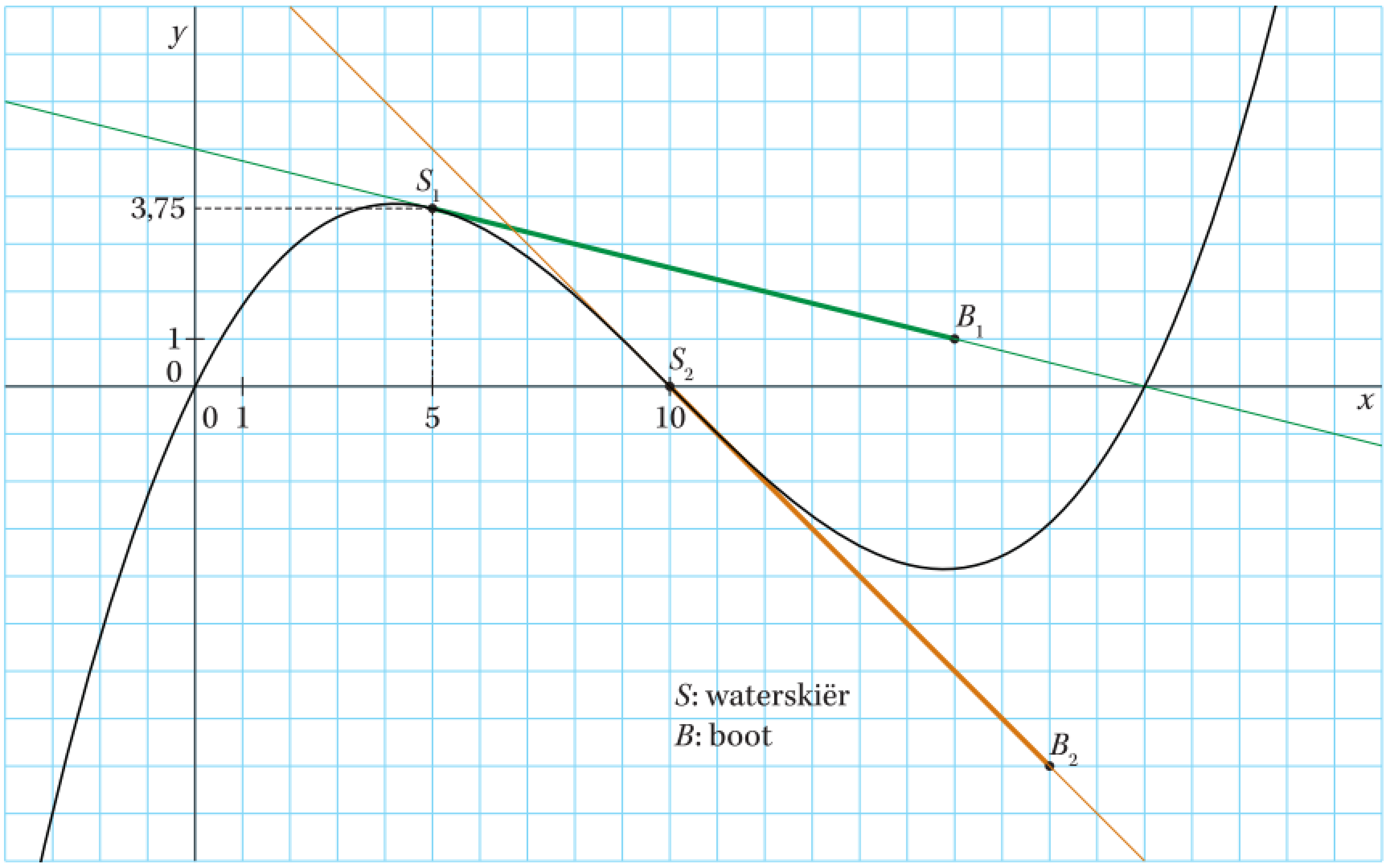
....

....

▶ Raaklijnen

37 Instap

Een waterskiër laat zich voorttrekken door een speedboot. Vanuit een helikopter lijkt de baan van de skiër op de grafiek van $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}3x^2 + 2x$ met de eenheid op beide assen uitgedrukt in meter. Op elk ogenblik raakt het gespannen touw aan de grafiek.



1 De waterskiër bevindt zich in het punt $S_1(5\,;3{,}75)$. Bereken de richting van het touw S_1B_1.

....

....

....

....

2 Vergelijkingen van rechten kunnen we opstellen met de formule voor punt en rico: $y - y_A = a(x - x_A)$. Bepaal een vergelijking van de sleeptouwrechte S_1B_1.

....

....

....

3 Even later bevindt de skiër zich in het punt $S_2(10, 0)$. Bereken de richting van het touw S_2B_2.

....

....

....

4 Bepaal een vergelijking van de sleeptouwrechte S_2B_2.

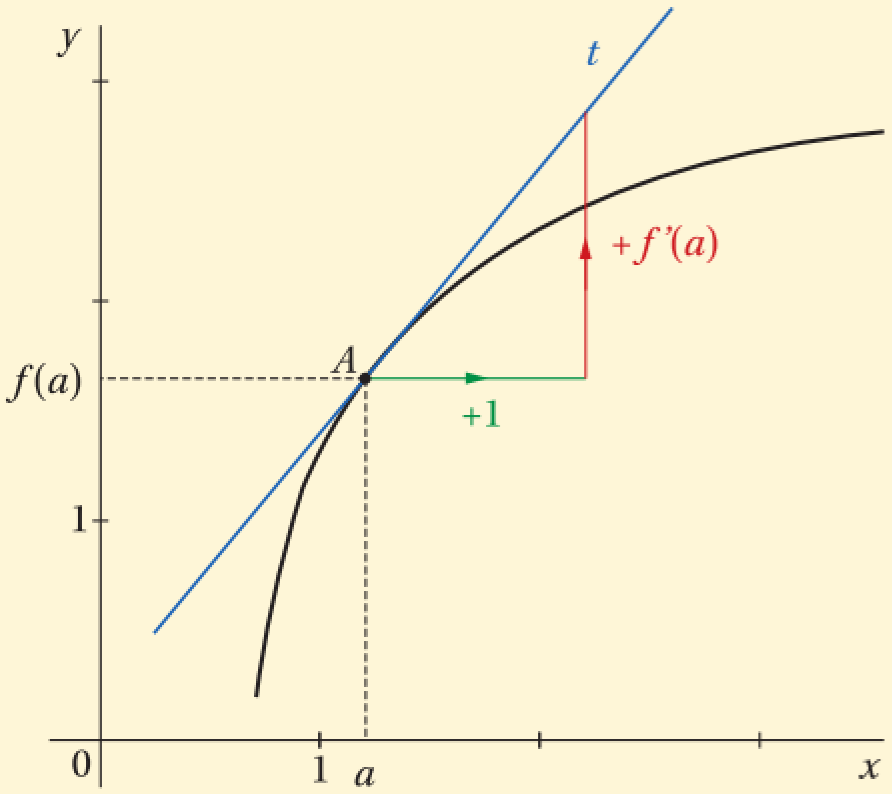
....

....

....

Vergelijkingen van raaklijnen opstellen

Met de formule voor punt en rico kunnen we een vergelijking van de raaklijn t in het punt A opstellen.



De richtingscoëfficiënt van de raaklijn t in het punt $A(a, f(a))$ is gelijk aan de functiewaarde $f'(a)$.

Formule: $\boldsymbol{t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$

Voorbeeld

We stellen een vergelijking op van de raaklijn t aan de grafiek van $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ in het punt $A(0, f(0))$.

We berekenen $f(0)$, $f'(x)$ en $f'(0)$.

$f(0) = -1$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$ $\quad$ $D(x^4 - 2x^3 + 2x - 1) = 4x^3 - 6x^2 + 2$

$f'(0) = 2$

We stellen een vergelijking van de raaklijn t op.

$t \leftrightarrow y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ $\quad$ $a = 0$

$y - (-1) = 2 \cdot (x - 0)$

$y + 1 = 2x$

$y = 2x - 1$

38

Bepaal een vergelijking van de raaklijn t aan de grafiek van de functie f in het punt A.

1 $f(x) = x^2 - 1$ $\quad A(-1, f(-1))$

2 $f(x) = x^2 - 4x - 5$ $\quad A(4, f(4))$

3 $f(x) = -x^3$ $\quad A(-2, f(-2))$

4 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 8x$ $\quad A(1, f(1))$

39

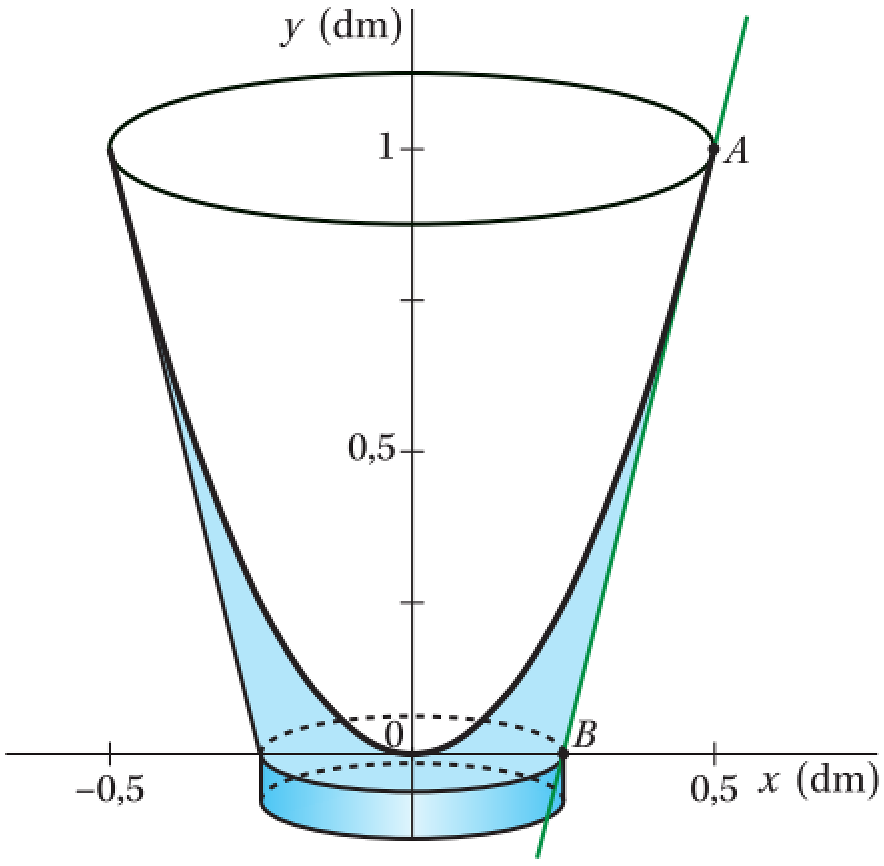
De grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 9$ heeft twee snijpunten S_1 en S_2 met de x-as.

1 Bepaal de coördinaten van S_1 en S_2.

2 Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in elk van deze punten.

40

Automatische vaatwassers werken efficiënter naarmate de binnenkant van het af te wassen voorwerp gladder is. De buitenkant van het kopje mag niet te bol zijn omwille van de stabiliteit. Daarom kiezen designers voor een afgeknotte kegel als buitenkant en een paraboloïde als binnenkant. De paraboloïde ontstaat door de grafiek van $f(x) = 4x^2$ met dom $f = [-0{,}5\,;\,0{,}5]$ te wentelen om de y-as. De afgeknotte kegel omknelt de paraboloïde aan de bovenkant van het kopje. Dit betekent dat bij een dwarsdoorsnede de raaklijn AB aan de parabool in het punt $A(0{,}5\,;\,1)$ ongeveer samenvalt met de buitenwand van het kopje.





1 Stel een vergelijking op van de raaklijn AB.

....

....

....

....

....

....

....

2 Waar snijdt de raaklijn de x-as?

....

....

....

....

....

....

3 Wat is de diameter van de bodem van het kopje?

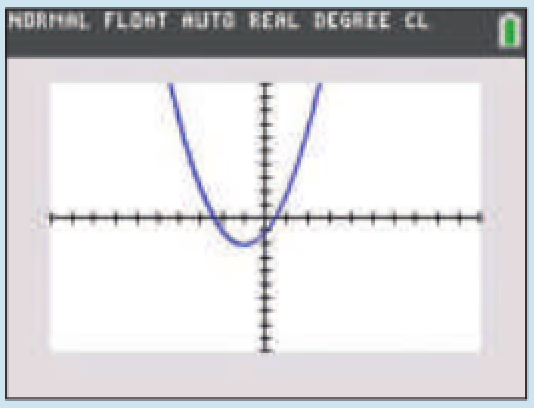
Raaklijnen aan grafieken van functies tekenen en hun vergelijkingen bepalen

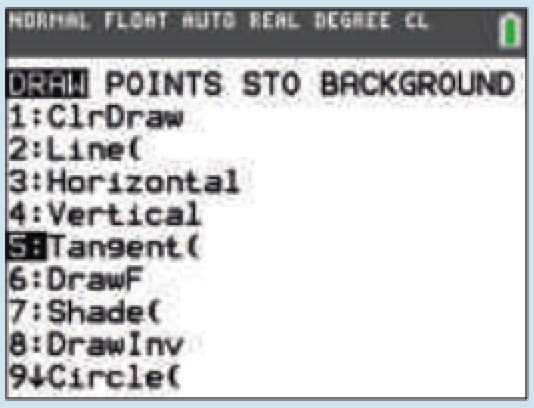
We tekenen de raaklijn aan de grafiek van $f(x) = x^2 + 2x - 1$ in het punt $(0, f(0))$ en bepalen een vergelijking van de raaklijn.

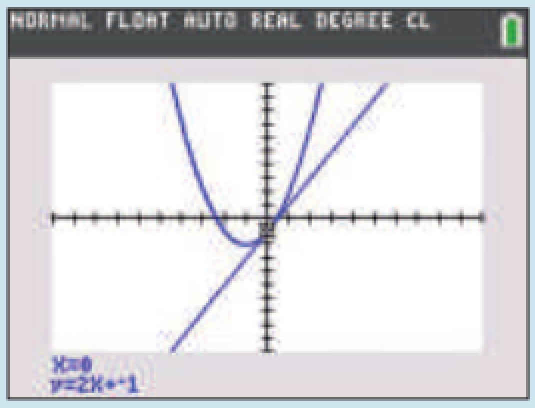
TEXAS INSTRUMENTS

Om in het grafiekscherm de raaklijn aan de grafiek in een punt $(0, f(0))$ te tekenen, drukken we de toets DRAW en kiezen de optie Tangent.

- [Y=] $x^2 + 2x - 1$ [ZOOM] [6: ZStandard]
  [2ND] [DRAW]
  [5: Tangent] 0 [ENTER]





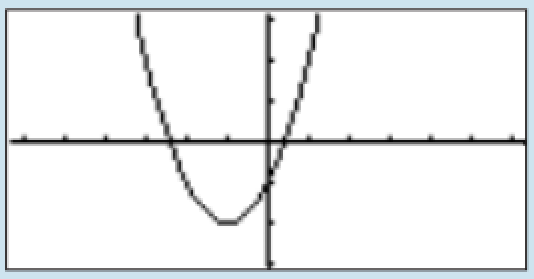
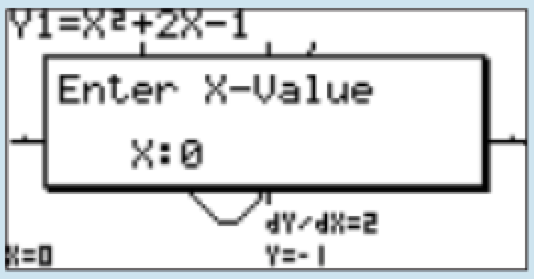


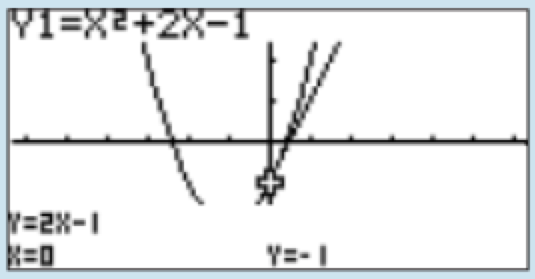
We kunnen een vergelijking van de raaklijn in het punt $(0, f(0))$ aflezen: $y = 2x - 1$.

CASIO

In het menu GRAPH tekenen we de grafiek van de functie in het kijkvenster INIT. Met de toets Sketch tekenen we de raaklijn aan deze grafiek in het punt $(0, f(0))$.

- [MENU] [3: GRAPH] $x^2 + 2x - 1$ [EXE] [SHIFT] [F3: V-Win] [F1: INIT] [EXIT] [F6: DRAW]
  [SHIFT] [F4: SKTCH] [F2: Tang] 0
  [EXE] [EXE]



We kunnen een vergelijking van de raaklijn in het punt $(0, f(0))$ aflezen: $y = 2x - 1$.

41

Teken met ICT de raaklijn t aan de grafiek van f in het punt A. Ga na of:

a de grafiek van f in de omgeving van het raakpunt aan dezelfde kant van de raaklijn ligt.

b de raaklijn buiten het raakpunt nog andere punten met de grafiek van f gemeen heeft.

1 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}$ en $A(-2,f(-2))$

....

....

....

....

2 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$ en $A(0,f(0))$

....

....

....

....

3 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x$ en $A(-1,f(-1))$

....

....

....

....

42

Bepaal met ICT een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt A. Welke hoek maakt de raaklijn met de x-as? Rond af op 1°.

1 $f(x)=x^2+1$
$A(2, 5)$

....

....

2 $f(x)=x^3+x^2$
$A(-2, -4)$

....

....

3 $f(x)=x^5-x^3+x$
$A(-1, -1)$

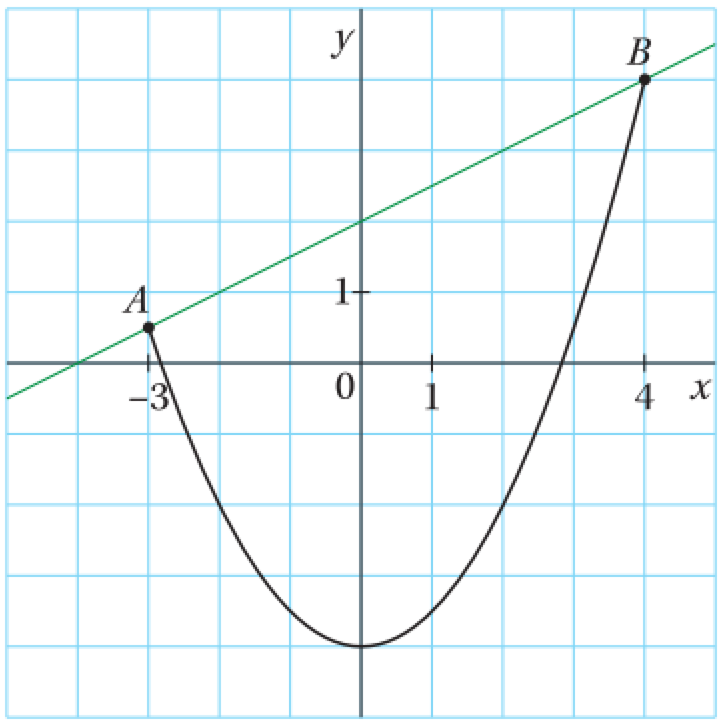
....

....

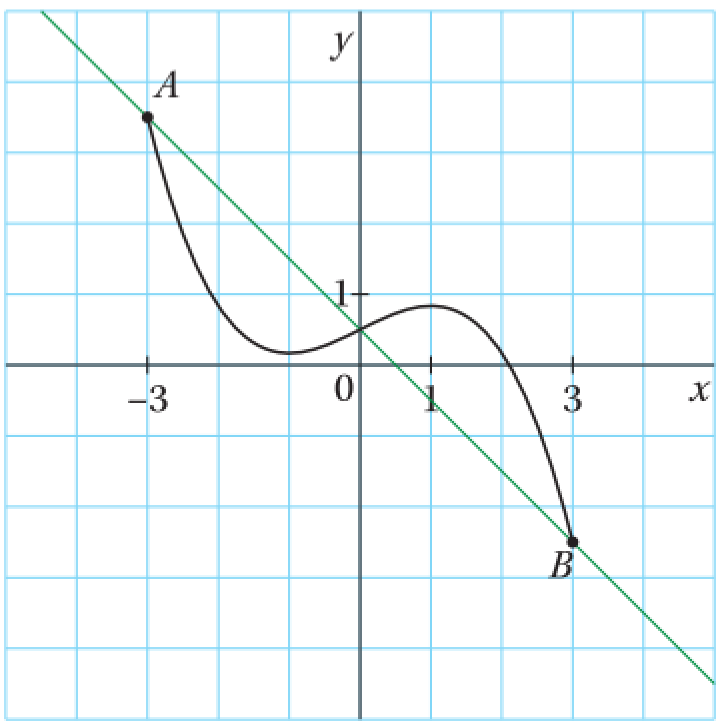
43

Duid een punt $P(a, f(a))$ aan op de grafiek waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t gelijk is aan de gemiddelde helling van de grafiek tussen de punten A en B. Teken de raaklijn.
Controleer met ICT.

1 $f(x) = 0{,}5x^2 - 4$ met $x \in [-3, 4]$



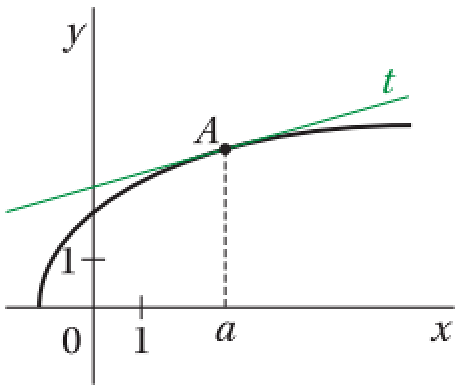
2 $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ met $x \in [-3, 3]$



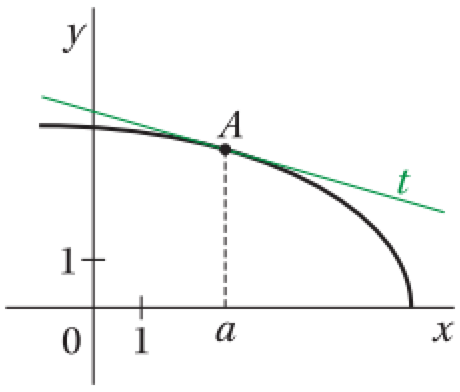
Afgeleiden en verloop van functies

44 Instap

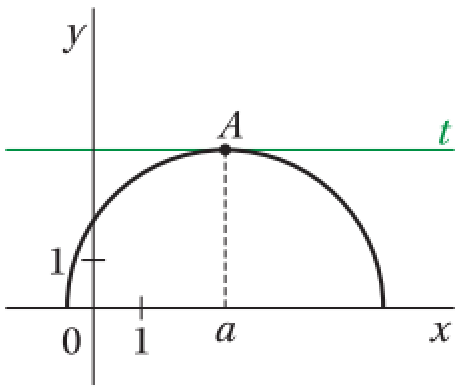
De rechte t is de raaklijn in het punt $A(a, f(a))$ aan de grafiek van f. Doorstreep zodat de uitspraak waar is.



1 Als f stijgend is in A, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t positief / negatief / nul en dan is $f'(a)$ positief / negatief / nul.



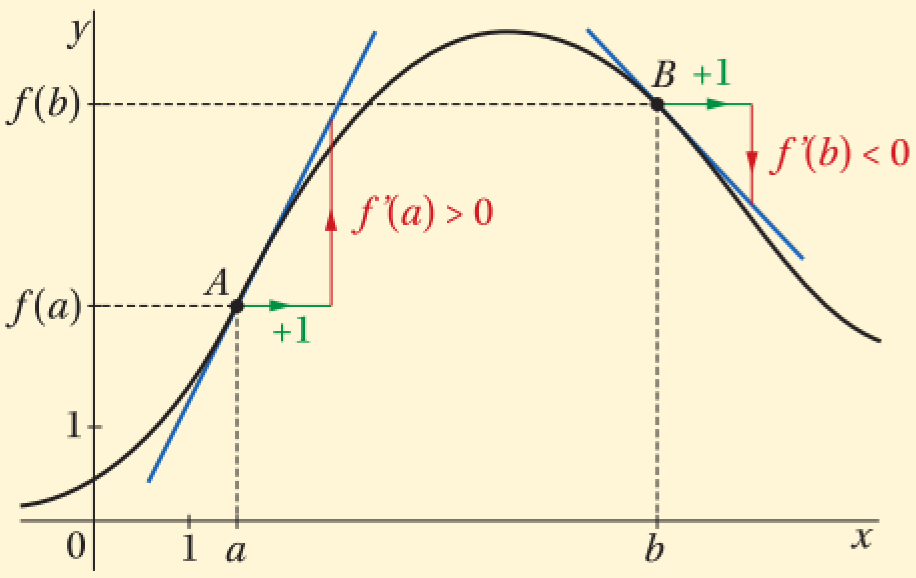
2 Als f dalend is in A, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t positief / negatief / nul en dan is $f'(a)$ positief / negatief / nul.



3 Als f een maximum heeft in A, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn t positief / negatief / nul en dan is $f'(a)$ positief / negatief / nul.

Verloop van functies onderzoeken met afgeleiden

Om het verloop of het stijgen en dalen van de grafiek van een functie f te kennen, onderzoeken we het teken van de afgeleide functie f'.



We stellen vast:

de grafiek stijgt in het punt A en $f'(a) > 0$;

de grafiek daalt in het punt B en $f'(b) < 0$.

We zeggen:

Een functie *f* stijgt in *x* als *f'*(*x*) > 0.

Een functie *f* daalt in *x* als *f'*(*x*) < 0.

Merkwaardige punten en afgeleiden

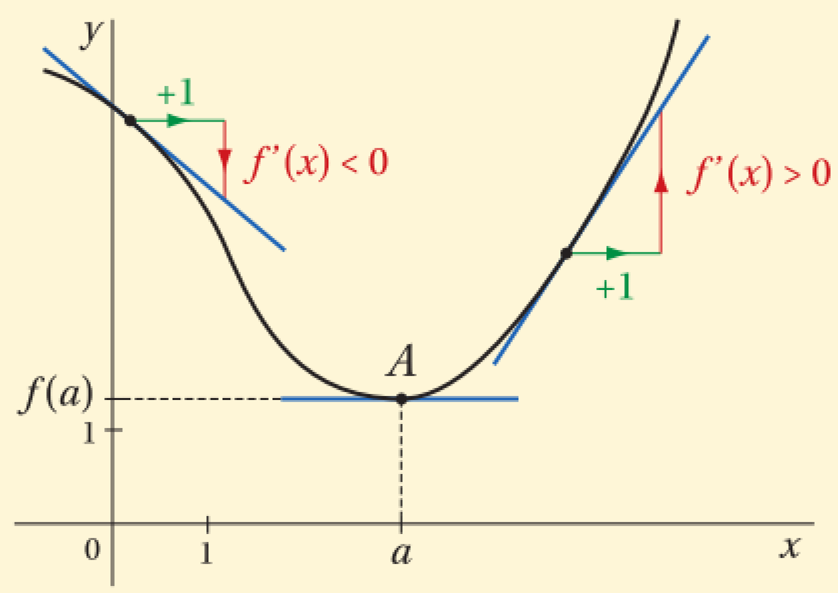
Als de raaklijn aan de grafiek van een functie in een punt $A(a, f(a))$ evenwijdig is met de x-as, dan is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt gelijk aan nul.

We schrijven: $f'(a) = 0$

Er zijn vier mogelijke gevallen.

GRAFIEK 1

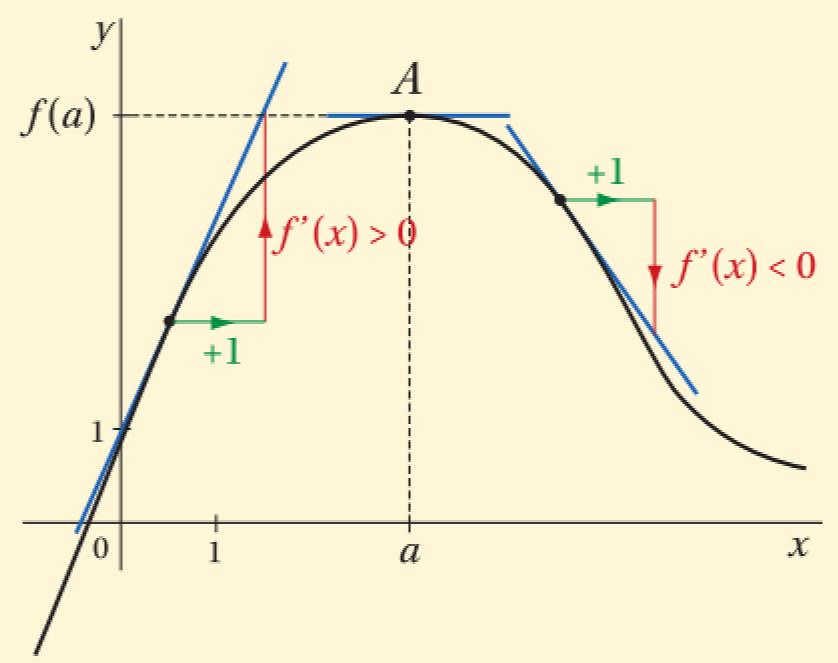
In A gaat de grafiek over van dalen naar stijgen. De functie f bereikt een **minimum** in a.



x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(a)$ minimum	↗

GRAFIEK 2

In A gaat de grafiek over van stijgen naar dalen. De functie f bereikt een **maximum** in a.



x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(a)$ maximum	↘

Voorbeeld

We stellen het verloopschema op van de functie $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x - 20{,}5$ met de afgeleide functie.

Afgeleide functie: $f'(x) = 3x^2 - 15x + 12$

Nulwaarden van f': $f'(x) = 0$

$3x^2 - 15x + 12 = 0$

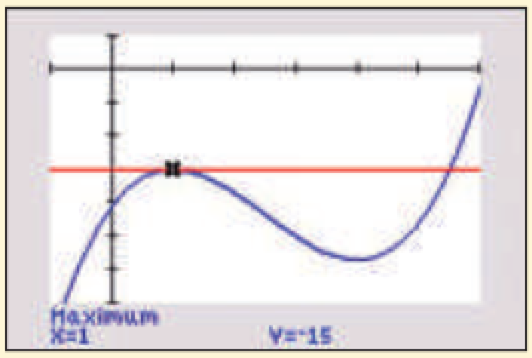
$x = 1 \quad \text{of} \quad x = 4$

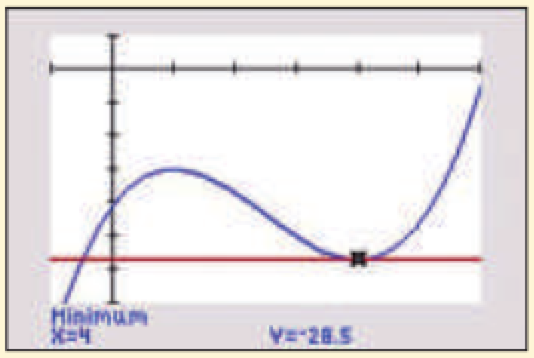
ICT: vkv oplossen

Verloopschema

x		1		4		
$f'(x)$	+	0	–	0	+	**teken van tweedegraadsfunctie**
$f(x)$	↗	−15 maximum	↘	−28,5 minimum	↗	**ICT: functiewaarden berekenen**

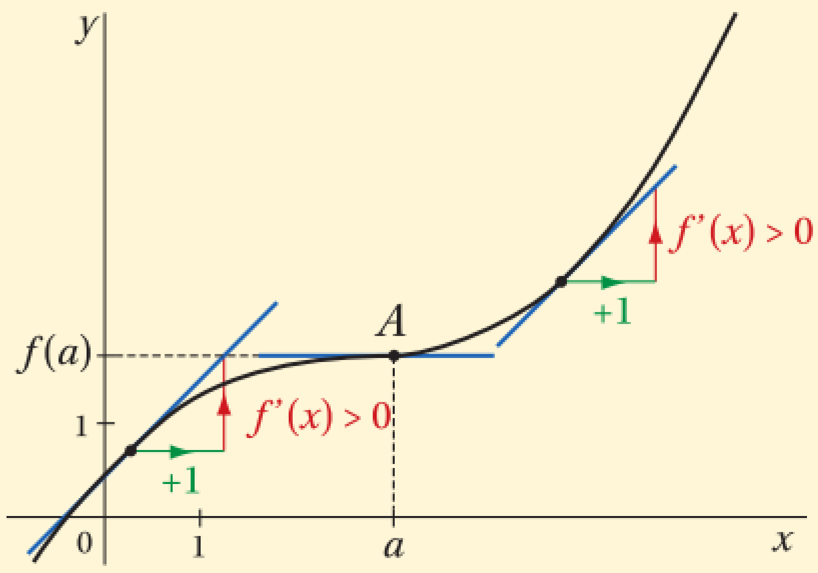
We controleren het verloopschema met ICT door de grafiek van f en de horizontale raaklijnen $y = -15$ en $y = -28{,}5$ te tekenen.





GRAFIEK 3

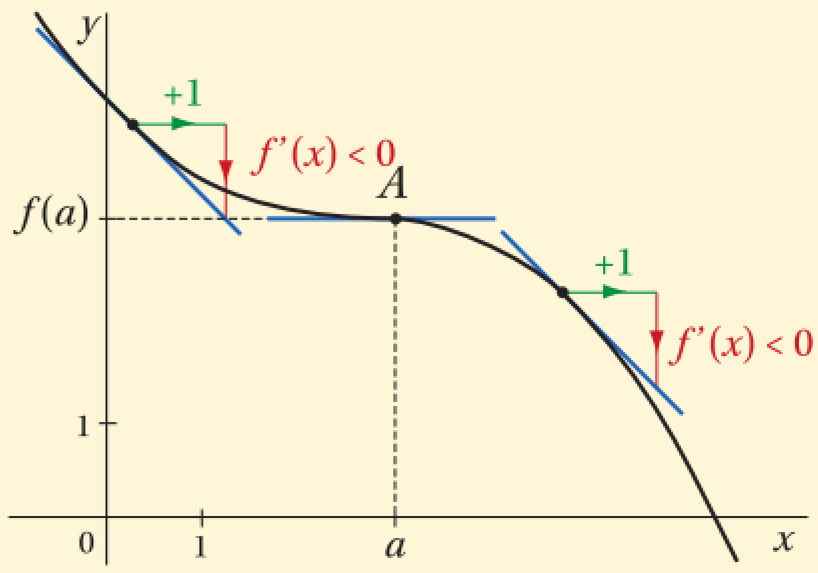
In de omgeving van A stijgt de grafiek.
In A gaat de grafiek over **van bol naar hol**.



x		a	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$ buigpunt	↗

GRAFIEK 4

In de omgeving van A daalt de grafiek.
In A gaat de grafiek over **van hol naar bol**.



x		a	
$f'(x)$	–	0	–
$f(x)$	↘	$f(a)$ buigpunt	↘

We zeggen dat de grafiek in het punt $A(a, f(a))$ een **buigpunt met horizontale buigraaklijn** heeft. De grafiek ligt aan weerskanten van de buigraaklijn.

Voorbeeld

We stellen het verloopschema op van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$ met de afgeleide functie.

Afgeleide functie: $f'(x) = x^2 - 2x + 1$

Nulwaarden van f': $f'(x) = 0$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

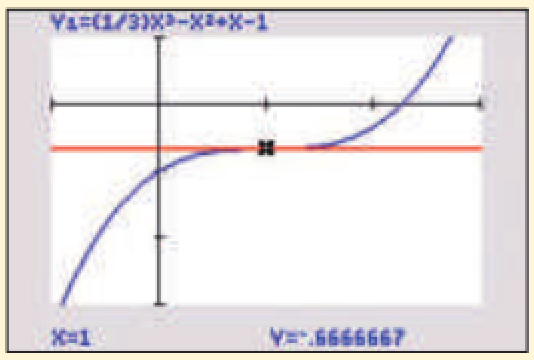
$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

Verloopschema

x		1		
$f'(x)$	+	0	+	**teken van tweedegraadsfunctie**
$f(x)$	↗	$-\frac{2}{3}$ buigpunt	↗	**ICT: functiewaarden berekenen**

We controleren het verloopschema met ICT door de grafiek van f en de horizontale buigraaklijn $y = -\frac{2}{3}$ te tekenen.



45

Onderzoek met de tekentabel van de afgeleide functie in welke intervallen de functie stijgt of daalt. Vul de tabel aan met pijltjes en benoem de merkwaardige punten van de grafiek.

1

x		-2		$1{,}5$		4	
$f'(x)$	–	0	+	0	+	0	–
$f(x)$	....	$f(-2)$	....	$f(1{,}5)$	....	$f(4)$	....
		....		....		....	

2

x		-5		0		$0{,}75$	
$f'(x)$	+	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	....	$f(-5)$	....	$f(0)$	....	$f(0{,}75)$	....
		....		....		....	

3

x		-11		-4		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	....	$f(-11)$	....	$f(-4)$	....	$f(1)$	....

....

4

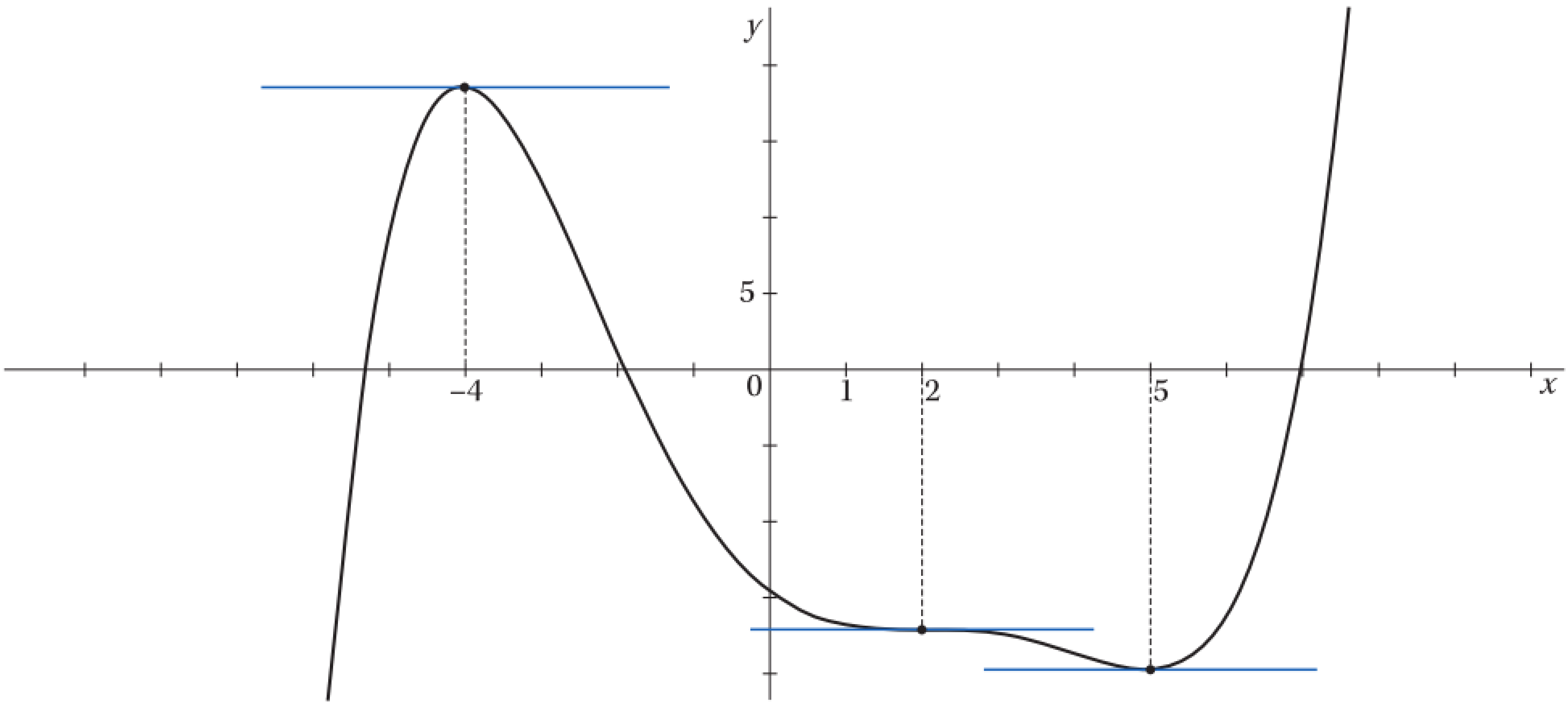
x		-2		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	....	$f(-2)$	....	$f(1)$	....	$f(3)$	....

....

46

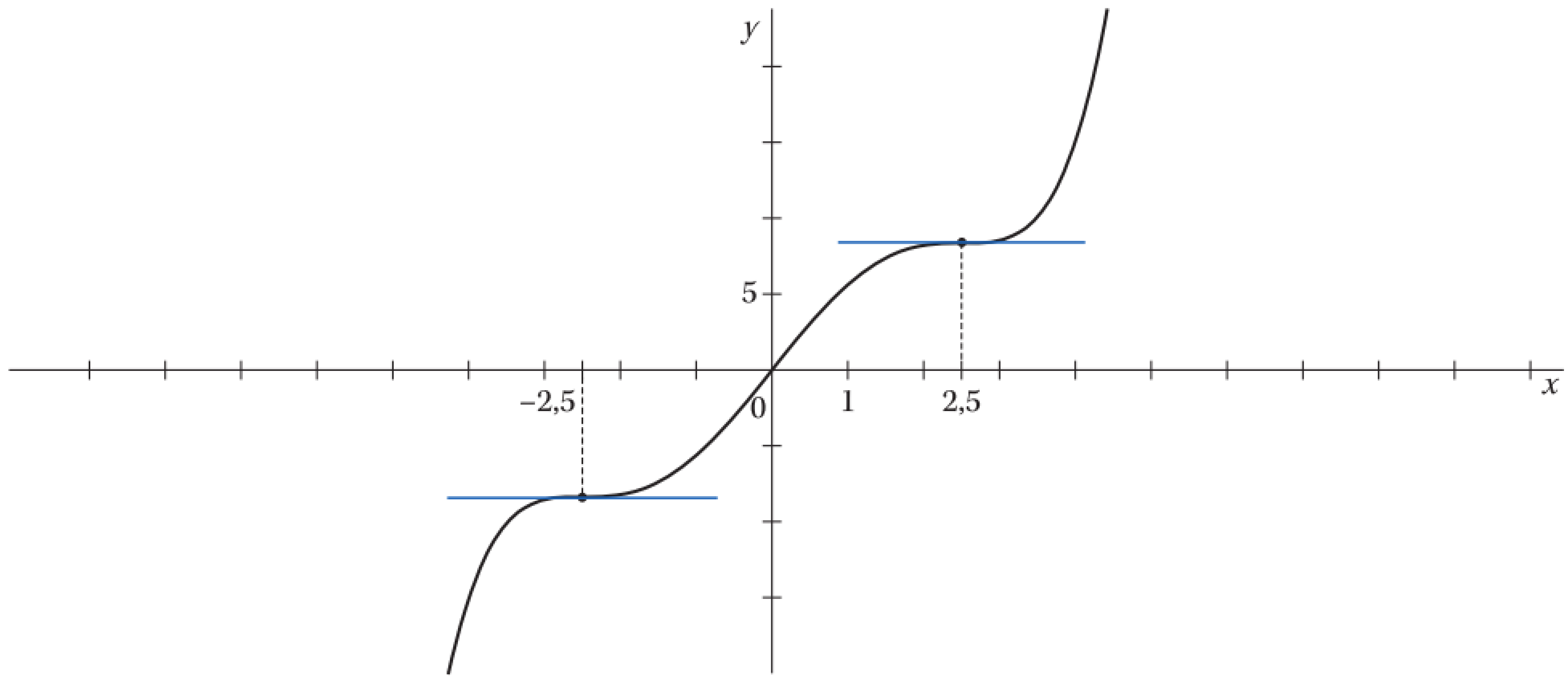
Onderzoek met behulp van de grafiek en de aangeduide punten met horizontale raaklijnen in welke intervallen de functie stijgt of daalt. Stel een tekentabel op van de afgeleide functie.

1



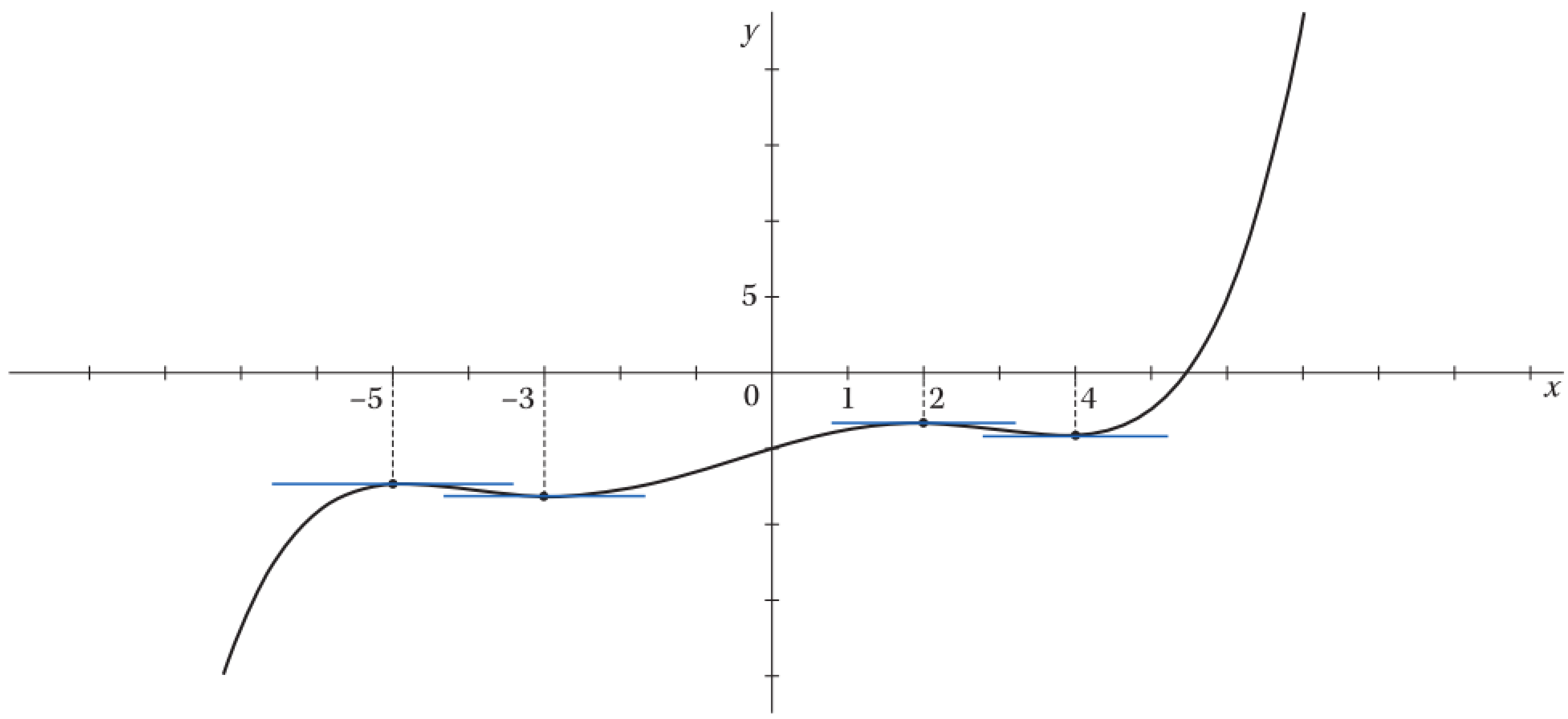
x	
$f'(x)$	

2



x	
$f'(x)$	

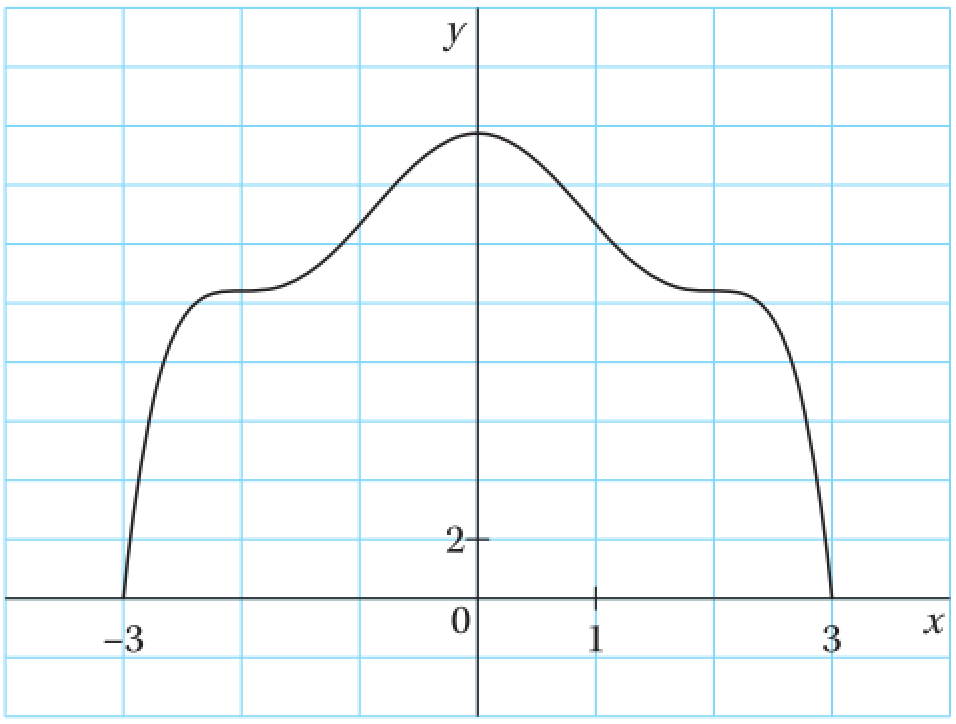
3



x	
$f'(x)$	

47

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{12}x^6 + x^4 - 4x^2 + \frac{63}{4}$ met dom $f = [-3, 3]$.



1 Uit de tekentabel van de afgeleide functie $f'(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 4x^3 - 8x$ kunnen we afleiden waar de functie f stijgt of daalt. Vul de tekentabel aan met de pijltjes en de functiewaarden. Benoem de merkwaardige punten van de grafiek.

x	−3		−2		0		2		3
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	
$f(x)$	0	....	....	....	....	....	....	....	0

....

2 Duid aan op de grafiek.

a In het groen de twee buigpunten en de buigraaklijnen in deze punten.

b In het rood de top van de grafiek en de topraaklijn

48

Verbind elke omschrijving met één of meerdere gepaste functievoorschriften.

a De grafiek heeft in (0, 0) een buigpunt met horizontale raaklijn. •

b De grafiek heeft in (0, 0) geen horizontale raaklijn. •

c De grafiek heeft in (0, 0) een minimum. •

d De grafiek heeft in (0, 0) een maximum. •

- $f(x) = x^3$
- $f(x) = -x^3$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = -x^2$
- $f(x) = x$
- $f(x) = -x$

49

Stel het verloopschema op met de afgeleide functie. Controleer met ICT.

1 $f(x) = 2x^3 + 6x^2$

Afgeleide functie: ....

Nulwaarden van f': ....

....

....

....

....

Verloopschema

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

2 $f(x) = -x^3 + 2x^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3 $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2$

4 $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 5$

50

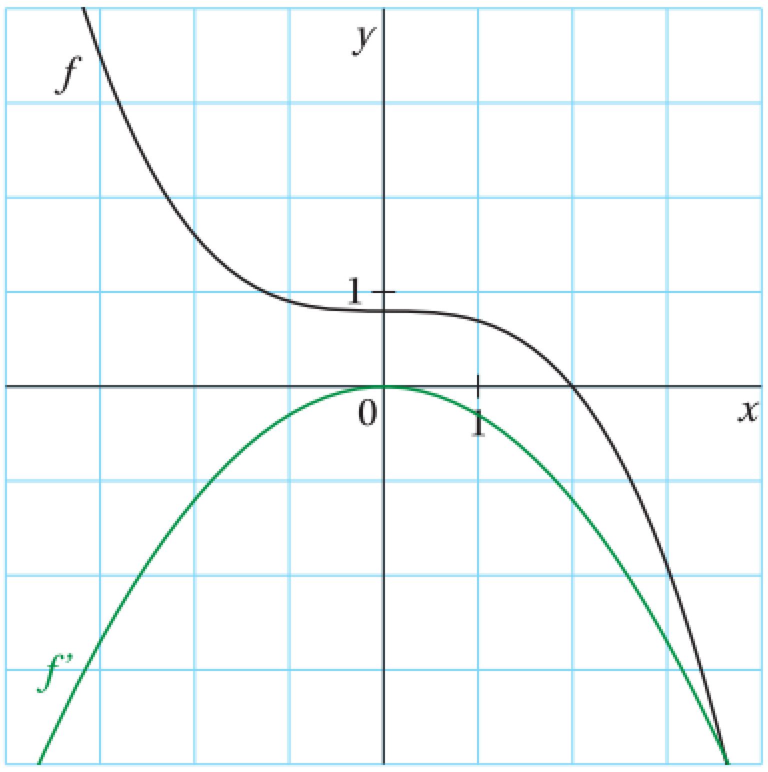
Bepaal in elk merkwaardig punt een vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie f.

1 $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$

2 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 4$

51

Gegeven zijn de grafieken van de functie $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}8$ en van de afgeleide functie $f'(x) = -0{,}3x^2$.



Lees op de grafiek de kenmerken van de functie *f* af. Voer eventueel aanvullende berekeningen uit.

1 Snijpunt met de *x*-as.

....

2 Snijpunt met de *y*-as.

....

3 Buigpunt met horizontale buigraaklijn.

....

....

....

4 De helling van de grafiek in het buigpunt.

....

5 De helling van de grafiek in het snijpunt met de *x*-as.

....

6 De *x*-waarden waar de helling van de grafiek –2,7 is.

....

....

....

....

7 Het interval waarin de functie dalend is.

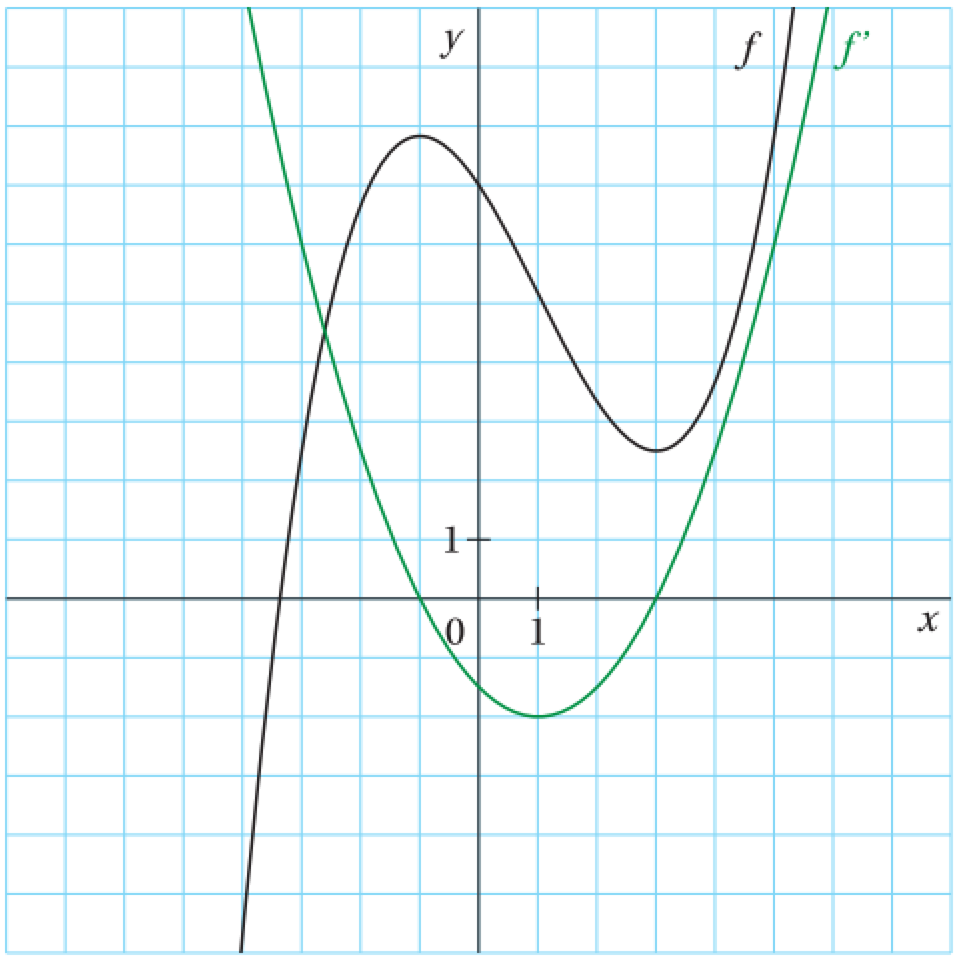
....

8 Het interval waarin de functie stijgend is.

....

52

Gegeven zijn de grafieken van de functie $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 7$ en van de afgeleide functie $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.



Lees op de grafiek de kenmerken van de functie *f* af. Voer eventueel aanvullende berekeningen uit.

1 Het minimum en het maximum van de functie.

....

....

2 De helling van de grafiek in het snijpunt met de *y*-as.

....

3 De *x*-waarden waar de helling van de grafiek 6 is.

....

....

4 Het interval waarin de functie dalend is.

....

5 Het interval waarin de functie stijgend is.

....

Extremumproblemen

Bij heel wat praktische problemen die we met functies kunnen beschrijven, moeten we een maximum of een minimum van een functie opsporen. Dergelijke problemen noemen we **extremumproblemen**.

Als we het functievoorschrift kennen, kunnen we de extreme waarden van de functie **grafisch** bepalen. Soms is het mogelijk om met de afgeleide functie de extreme waarden **algebraïsch** te berekenen.

Voorbeeld

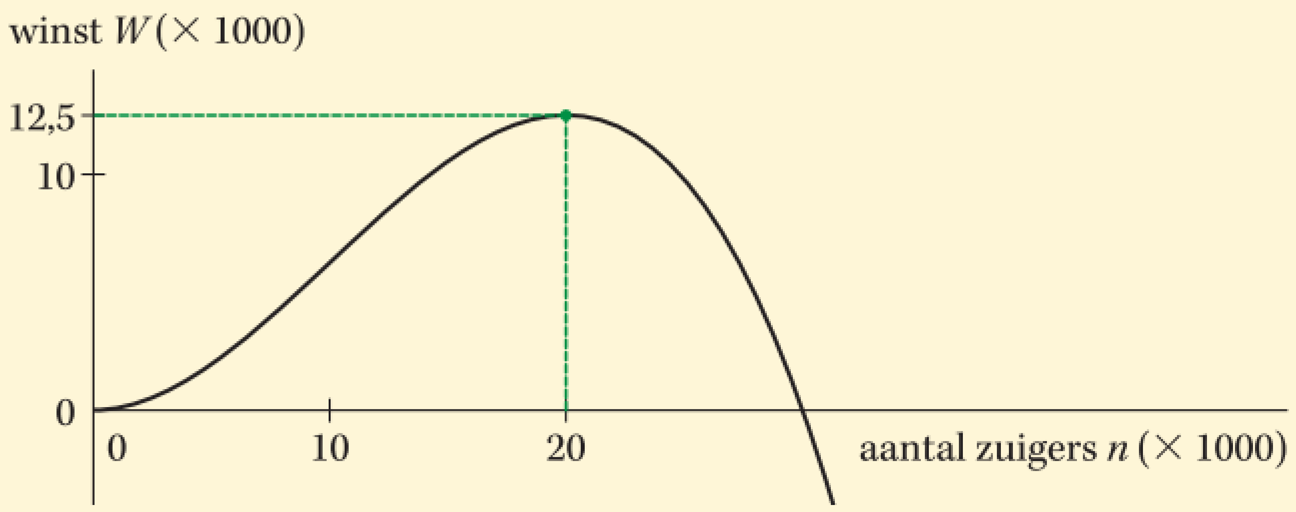
Een fabrikant van zuigers voor benzinemotoren kan zijn wekelijkse winst berekenen met de formule:

$W(n) = -\frac{1}{320}(n^3 - 30n^2)$ W: winst (× 1000 euro)
n: aantal zuigers (× 1000)

We onderzoeken bij welke productie de winst maximaal is.

Grafische methode

We tekenen de grafiek van de winstfunctie en bepalen het maximum van de functie.



De wekelijkse winst is maximaal bij een productie van 20 000 zuigers en bedraagt dan 12 500 euro.

Algebraïsche methode

We onderzoeken het verloop van de winstfunctie met de afgeleide functie.

Afgeleide functie: $W'(n) = -\frac{1}{320}(3n^2 - 60n)$ $D\left(-\frac{1}{320}(n^3 - 30n^2)\right) = -\frac{1}{320}(3n^2 - 60n)$

Nulwaarden van W': $W'(n) = 0$

$$-\frac{1}{320}(3n^2 - 60n) = 0$$

$$3n^2 - 60n = 0$$

$$n^2 - 20n = 0$$

$$n(n - 20) = 0$$

$$n = 0 \quad \text{of} \quad n - 20 = 0$$

$$n = 20$$

Verloopschema

n		0		20		dom W = [0, +∞[
$W'(n)$	–	0	+	0	–	teken van tweedegraadsfunctie
$W(n)$		0	↗	12,5 maximum	↘	ICT: functiewaarden berekenen

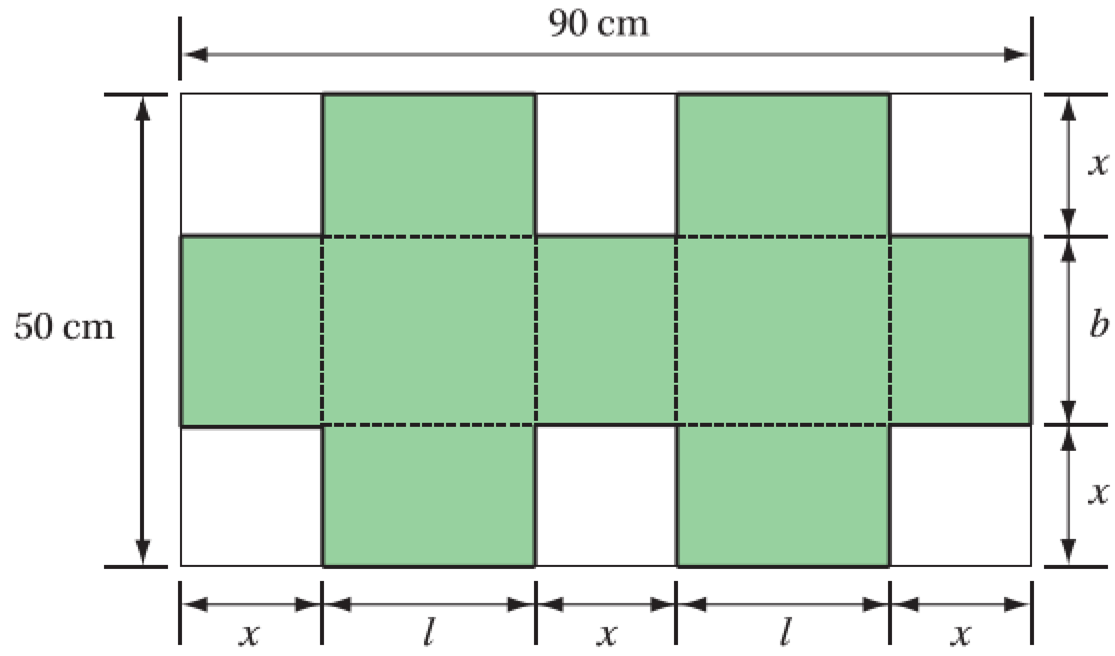
De wekelijkse winst is maximaal bij een productie van 20 000 zuigers en bedraagt dan 12 500 euro.

Merk op

Het deel van het schema dat buiten het werkdomein van de functie W valt, wordt rood ingekleurd.

53

Een taartjesdoos wordt gevouwen uit een rechthoekig stuk karton van 50 cm bij 90 cm. Door zes gelijke vierkanten met zijde x cm weg te knippen, komen de zijflappen vrij. Het overblijvende deel vouwen we tot een doos met deksel.



1 Welke waarden kan de insnijlengte x aannemen?

....

2 Schrijf de afmetingen van de doos in functie van x.

$l =$ .... **l : lengte in cm**

$b =$ .... **b : breedte in cm**

$h =$ .... **h : hoogte in cm**

3 Toon aan dat we het volume van de taartjesdoos kunnen berekenen met de formule $V = 3(x^3 - 55x^2 + 750x)$.

$V =$ ....

....

....

....

....

....

....

4 Bereken de insnijlengte waarvoor het volume maximaal is.
Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 Wat is het maximale volume in dm^3 van de taartjesdoos?

....

....

6 Wat zijn dan de afmetingen in cm van de taartjesdoos?

$h =$ ....

$l =$ ....

$b =$ ....

7 Controleer de gevonden resultaten met de grafische methode. Noteer de venstervariabelen en de schaalaanduidingen op de x-as en de y-as.

x_{min} = ... x_{max} = ... x_{scl} = ...

y_{min} = ... y_{max} = ... y_{scl} = ...

54

Een houthakker stelt vast dat de groeisnelheid van zijn sparren afhankelijk is van de onderlinge afstand tussen de sparren. Hij plant minstens 9 sparren per are. Met 9 sparren per are is de gemiddelde groeisnelheid 42 cm per jaar. Voor elke spar die meer wordt aangeplant, daalt de jaarlijkse groeisnelheid met 2 cm.

1 Stel het aantal aangeplante sparren per are voor met x. Bepaal een functie $f(x)$ die de opbrengst aan nieuw hout per jaar beschrijft.

2 Bereken het ideaal aantal sparren per are zodat er een maximale opbrengst aan nieuw hout per jaar is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

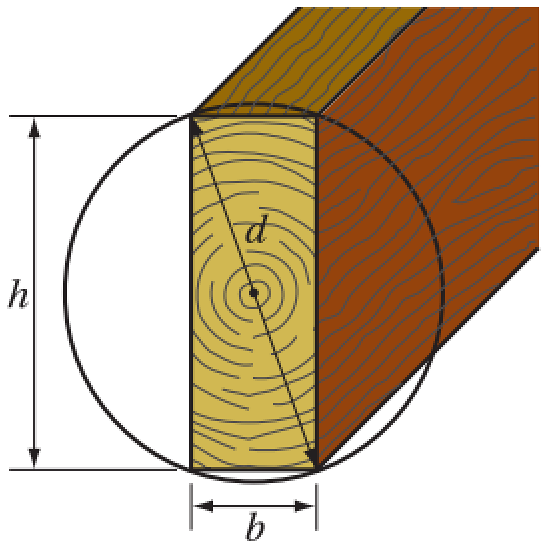
3 Controleer het gevonden resultaat met de grafische methode. Noteer de venstervariabelen en de schaalaanduidingen op de x-as en de y-as.

x_{min} = ... x_{max} = ... x_{scl} = ...

y_{min} = ... y_{max} = ... y_{scl} = ...

55

Een houten dwarsbalk buigt minder door als de balk op zijn smalste zijde ligt. Het weerstandsmoment W van een balk wordt bepaald met de formule $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

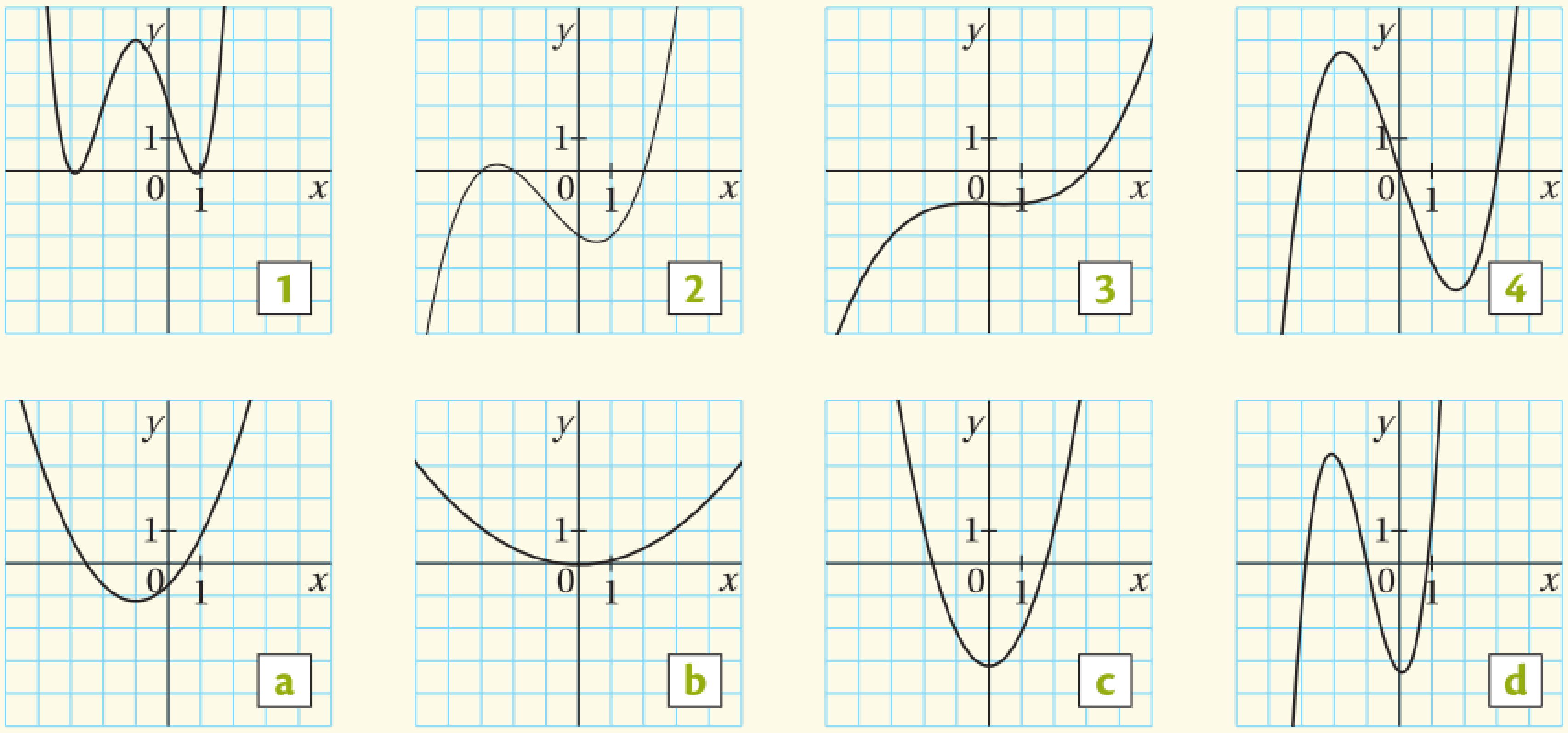


Bepaal de afmetingen van de balk met de grootste doorsnede die uit een cilindrische boomstam met een diameter d van 30 cm kan worden gezaagd, zodat het weerstandsmoment van de balk maximaal is. Rond af op 0,1 cm. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

Aanwijzing: schrijf eerst het weerstandsmoment als een functie van de breedte.

Uitdagingen

1 Gegeven zijn de volgende grafieken en de bijbehorende hellingsgrafieken.
Welke grafieken horen bij elkaar?



zie pagina 342

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + ax + b$ en $g(x) = -x^2 + bx$. Bepaal a en b zodat $f(3) = g(3)$ en $f'(3) = g'(3)$.

zie pagina 342

3 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + ax + b$. Bepaal a en b zodat de grafiek van f en de grafiek van f' elkaar snijden in het punt $P(2, -1)$.

zie pagina 343

4 Bepaal de hoek gevormd door de raaklijnen in de punten $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ en $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ van de grafiek van $f(x) = x^3 - x^2$. Rond af op 1°.

zie pagina 343

5 Bepaal de waarde van a in de vergelijking $y = x + a$ van de raaklijn t aan de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 32x + 4$.

zie pagina 343

6 Voor welke waarden van a raakt de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + a$ de x-as?

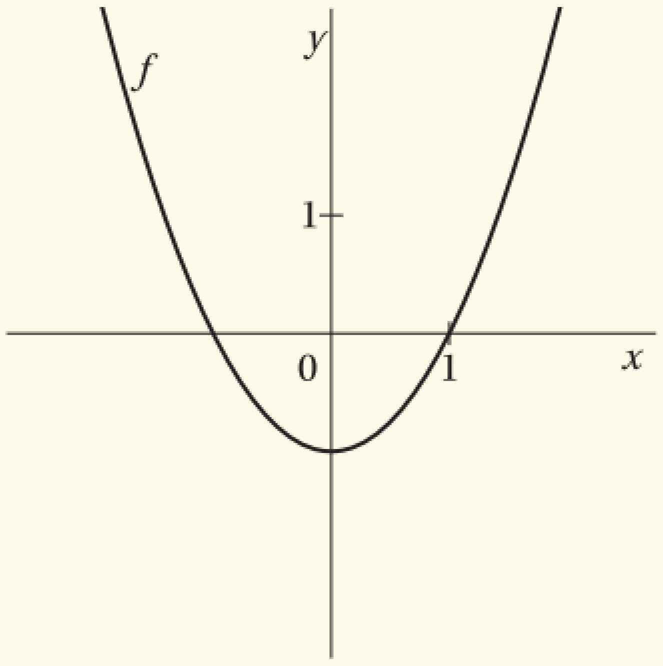
zie pagina 344

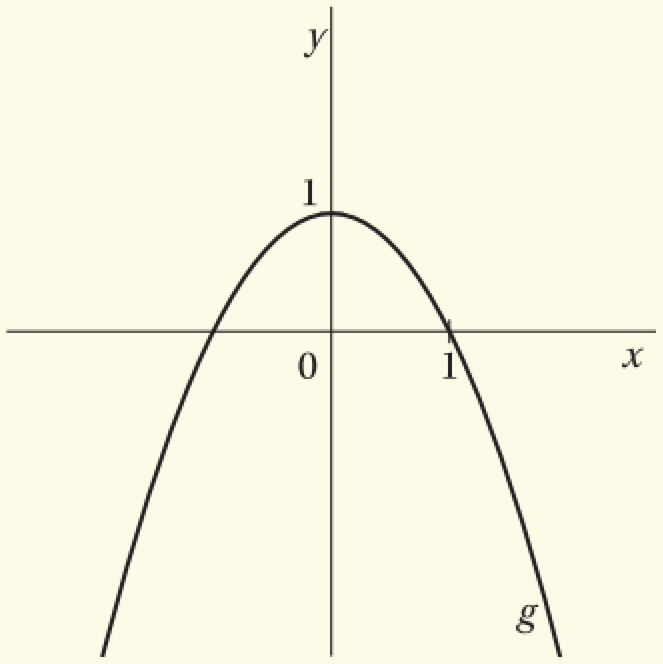
7 In welke punten van de grafiek van $f(x) = x^3 - x + 1$ is de raaklijn t

1. evenwijdig met de x-as?
2. evenwijdig met de tweede deellijn d van het assenstelsel?
3. evenwijdig met de rechte $a \leftrightarrow y = 2x - 3$?
4. evenwijdig met de rechte $b \leftrightarrow y = -4x + 3$?

zie pagina 344

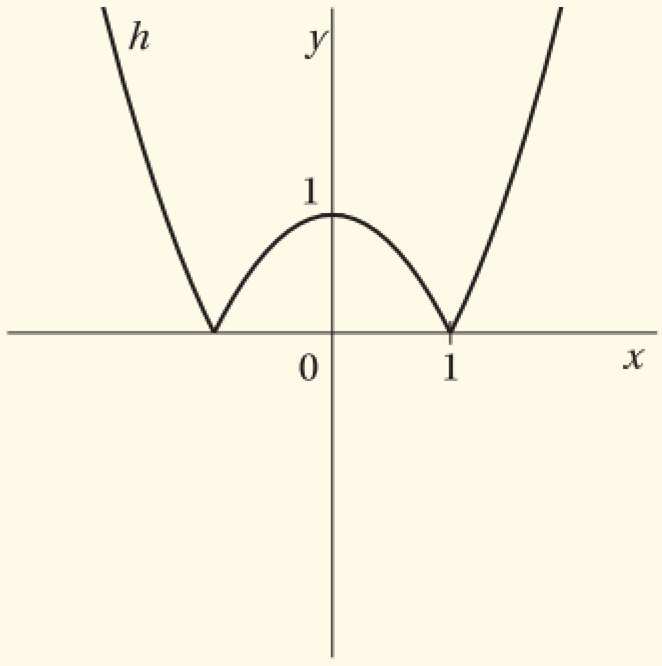
8 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = 1 - x^2$.





1 Bereken voor beide grafieken een vergelijking van de raaklijn in het punt (1, 0). Teken de raaklijnen.

2 Teken met behulp van deze vergelijkingen de raaklijnen in het punt (1, 0) aan de grafiek van $h(x) = |x^2 - 1|$.



3 Heeft de grafiek van h nog zo een merkwaardig punt waarin de raaklijn aan de linkerkant niet samenvalt met de raaklijn aan de rechterkant? Zo ja, geef de coördinaten van dit punt.

zie pagina 345

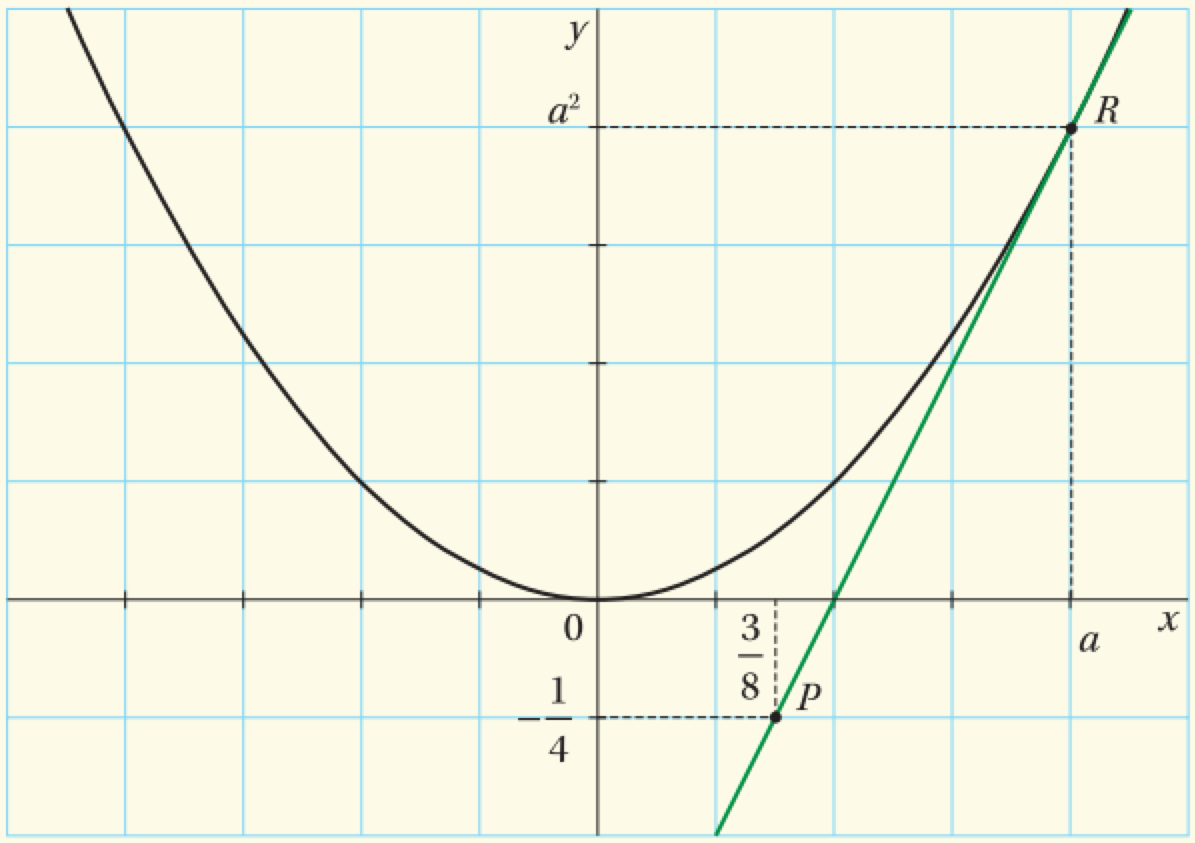
9 De grafiek van de veeltermfunctie f heeft een raaklijn t evenwijdig met de rechte $a \leftrightarrow y = -3x + 2$.

Omcirkel de mogelijke functievoorschriften.

(A) $f(x) = 2$ (B) $f(x) = x + 2$ (C) $f(x) = x^2 + 2$ (D) $f(x) = x^3 + 2$ (E) $f(x) = x^4 + 2$

zie pagina 346

10 Uit het punt $P\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ kunnen twee raaklijnen getrokken worden aan de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Eén van deze raaklijnen heeft als raakpunt $R(a, a^2)$.



1 Stel een formule op voor de rico van de raaklijn *PR*.

2 Bepaal met de afgeleide functie *f'* de helling van de raaklijn *PR*.

3 Bereken alle waarden van *a* die voldoen aan de vergelijking bekomen door de antwoorden op de vragen 1 en 2 aan elkaar gelijk te stellen.

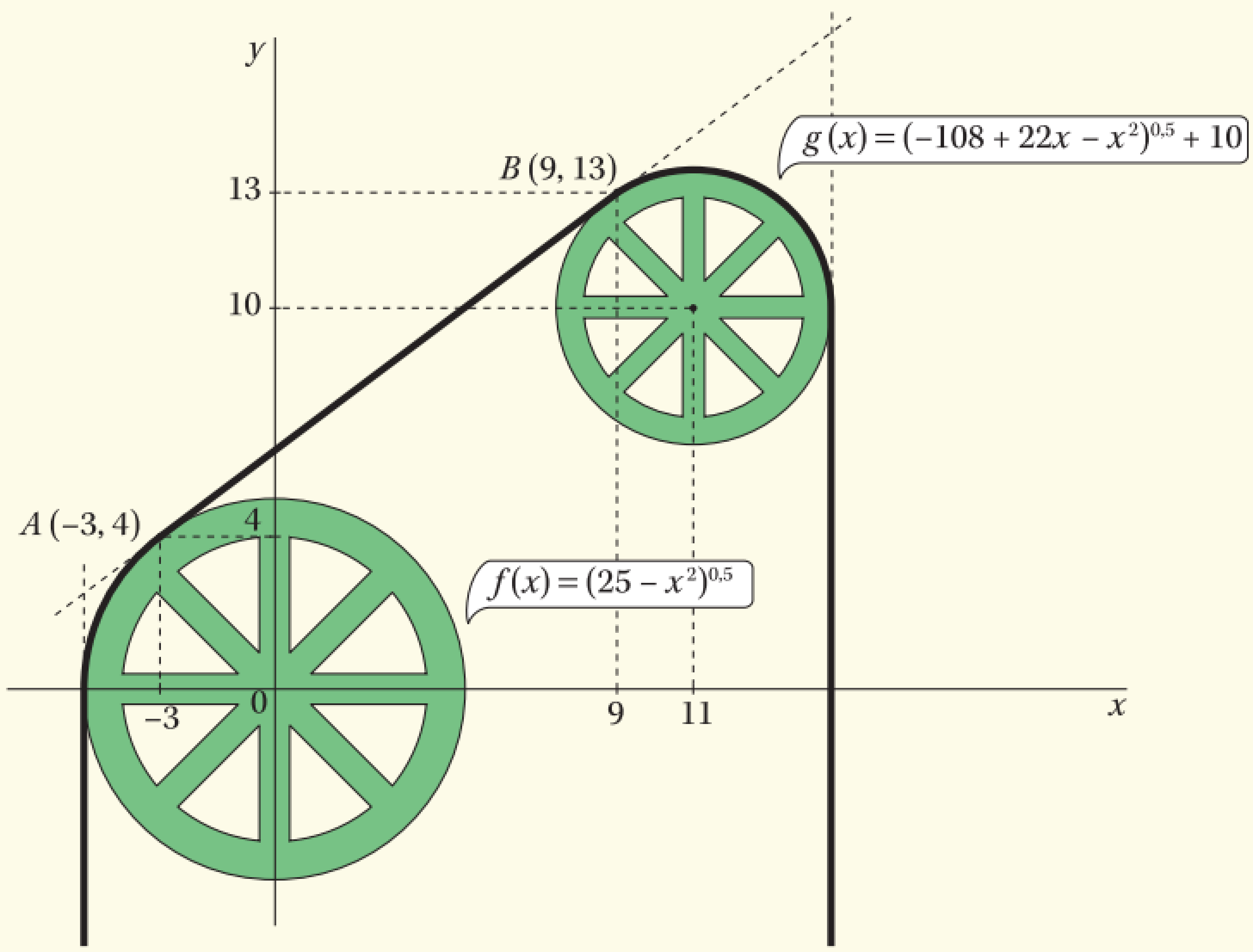
4 Bepaal de richtingscoëfficiënten van de twee raaklijnen t_1 en t_2 uit het punt *P* aan de grafiek van *f*.

5 Berekenen de hoek tussen de raaklijnen.

6 Teken de raaklijn t_2.

zie pagina 347

11 Op de tekening wordt een mechanisch onderdeel van een ambachtelijke machine afgebeeld. Er is echter iets mis gelopen met dit ontwerp! De punten $A(-3, 4)$ en $B(9, 13)$ zijn de bovenste raakpunten van de aandrijfriem aan twee wielen. Het plan vermeldt de functievoorschriften van de bovenste helften van de twee wielen.



1 Bereken de richtingscoëfficiënt van de aandrijfriem tussen A en B.

2 Bereken met ICT de helling van de raaklijn in A aan de grafiek van f.

3 Bereken op dezelfde wijze de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in B aan de grafiek van g.

4 Welk wiel raakt niet aan de rechte AB?

zie pagina 348

12 Gegeven is de tekentabel van de functie f en van zijn afgeleide functie f'.

x		-4		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	....	4	....	0	....

1 Vul het verloopschema van f aan.

2 Teken de grafiek van f als de grafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt $(0, 2)$.

zie pagina 349

13 Gegeven zijn de veeltermfuncties:

1 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ 2 $f(x) = -x^4 + x^3$ 3 $f(x) = \dfrac{1}{6}x^6 - x^4$

a Stel met de algebraïsche methode de tekentabel van f op.

b Bereken de afgeleide functie f'.

c Stel met de afgeleide functie het verloopschema van f op.

d Teken de grafiek van f.

zie pagina 350

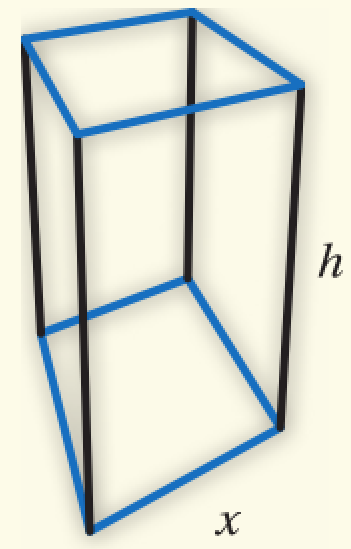
14 In een tropisch zwembad kunnen we vanaf een 12 meter hoge glijbaan in het golfslagbad plonsen. De glijbaan bestaat uit een doorzichtige koker die in één vlak kronkelt volgens de grafiek van de functie:

$$f(x) = \frac{1}{81\,920}x^7 - \frac{21}{12\,800}x^5 + \frac{21}{320}x^3 + 6 \qquad \text{met} \qquad \text{dom}\, f = [-8{,}29\,;\,8{,}29]$$

Bepaal de buigpunten met horizontale raaklijn van de glijbaan. Rond de coördinaten af op 2 decimalen.

zie pagina 354

15 Een fabrikant vraagt een ontwerp te maken van een draadmodel van een balk met vierkant grondvlak. De opstaande ribben moeten verstevigd worden zodat voor deze draden een meerprijs van 5 eurocent per meter wordt aangerekend. De basisdraad kost 20 eurocent per meter en de totale kostprijs is 2 euro. Bepaal de afmetingen van het draadmodel met de grootste insluitruimte. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Druk de insluitruimte V uit in functie van de zijde x van het grondvlak.

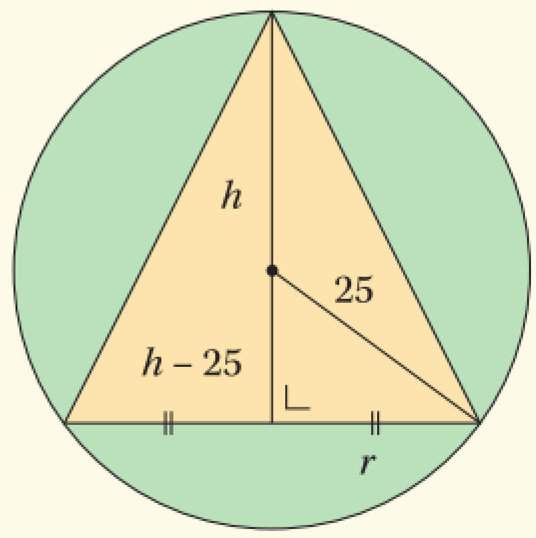
2 Bepaal het werkdomein van V.

3 Voor welke afmetingen is het volume maximaal? Rond af op 1 mm.

4 Hoeveel is de maximale insluitruimte? Rond af op 1 dm^3.

zie pagina 356

16 In een discobal met een diameter van 50 cm zit een kegel ingesloten. Om een extra lichteffect te bekomen, moet het volume van de kegel zo groot mogelijk zijn. Wat is de hoogte h en de straal r van die ingeschreven kegel? Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



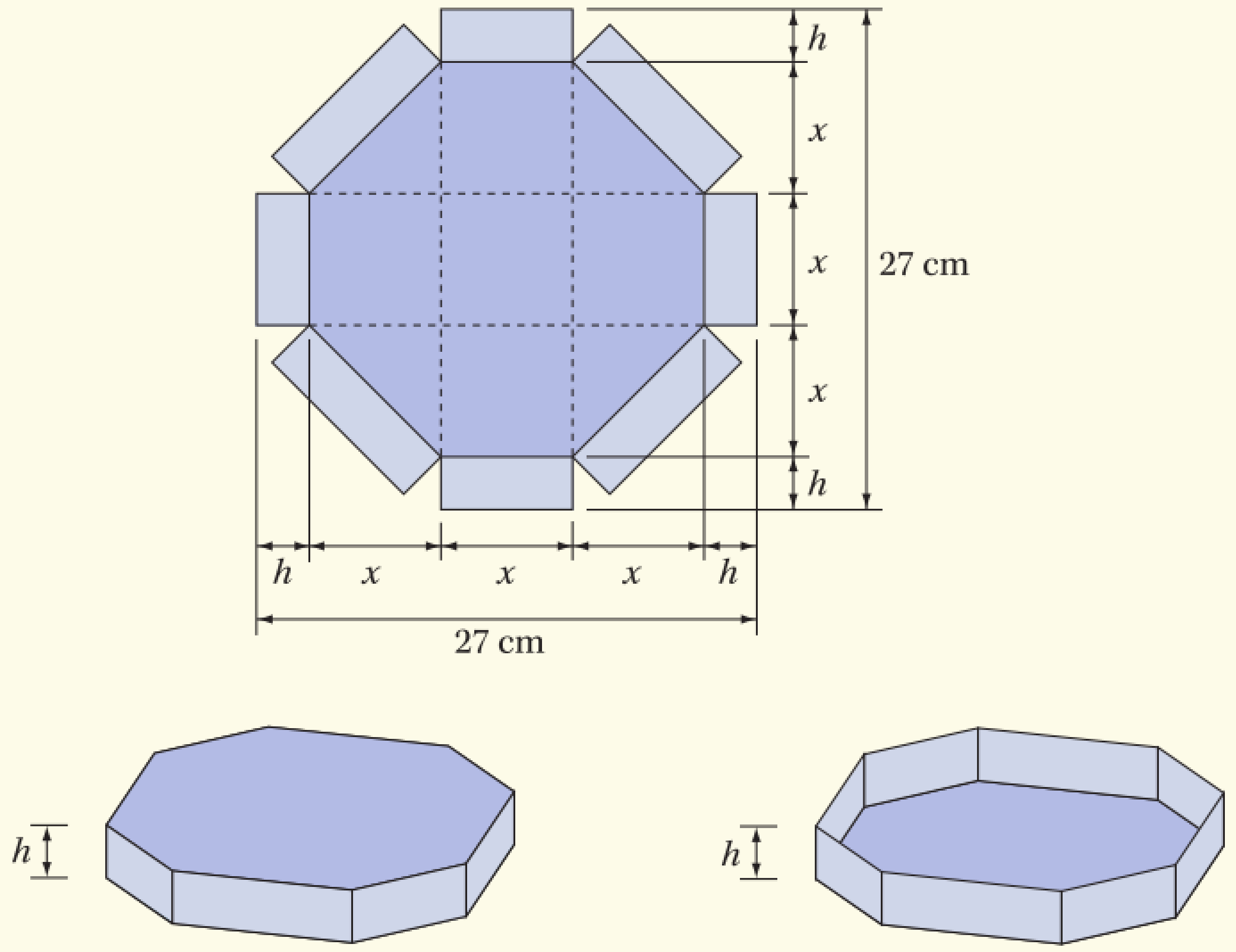
1 Stel een formule op voor het volume V van de kegel in functie van de hoogte h.

2 Voor welke hoogte is de inhoud van de kegel maximaal? Rond af op 1 mm.

3 Hoe groot is dan de straal van het grondvlak van de ingeschreven kegel? Rond af op 1 mm.

zie pagina 357

17 Uit een vierkant stuk karton met zijde 27 cm knippen we de helft van een achthoekig doopsuikerdoosje volgens het bouwplan in de figuur. De tweede helft is identiek aan de eerste helft, zij het een fractie groter: beide helften moeten we klemmend over elkaar kunnen schuiven.



Voor welke x-waarde is de inhoud van het doosje maximaal? Bepaal de maximale inhoud. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

zie pagina 359

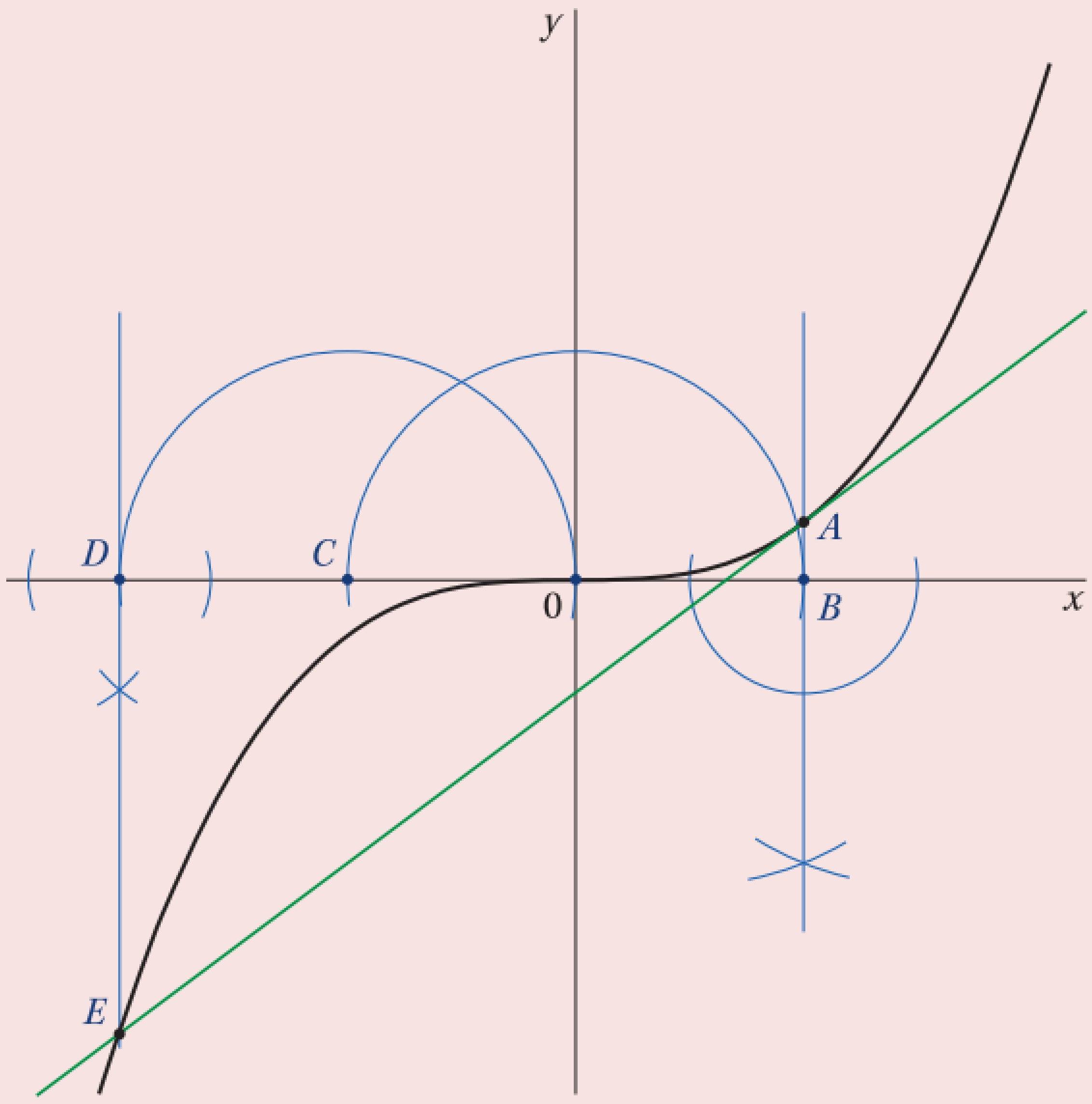
Exploratie

Raaklijnenconstructie

Wiskundigen houden ervan meetkundige constructies uit te denken die uitvoerbaar zijn met passer en liniaal.

Om de raaklijn te tekenen in een willekeurig punt van de grafiek van een functie $f(x) = ax^3$ gaan we als volgt te werk.

1 Kies een willekeurig punt $A(x, ax^3)$ op de grafiek van f.
2 Projecteer A op de x-as en noem de projectie B.
3 Spiegel B om de oorsprong O en noem het spiegelbeeld C.
4 Spiegel de oorsprong O om C en noem het spiegelbeeld D.
5 Construeer in D de loodlijn op de x-as die de grafiek snijdt in E.
6 De rechte AE is de raaklijn in A aan de grafiek van f.



Deze raaklijnenconstructie kunnen we verklaren met de antwoorden op de volgende vragen.

1 Bepaal de coördinaten van de punten B, C, D en E.
2 Bereken de helling van de rechte AE.
3 Waarom raakt de rechte AE aan de grafiek van de functie $f(x) = ax^3$?

zie pagina 361

4.2 Afgeleiden van producten en machten

Afgeleiden van producten van veeltermfuncties

1 Instap

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3$ en $g(x) = x^2$.

1 Bereken het product $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

....

2 Bepaal het voorschrift van de afgeleide functies f', g' en p'.

....

3 Zijn de volgende beweringen juist?

a $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

....

....

....

b $p'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$

....

....

....

Afgeleiden van productfuncties

De functie $p(x) = x^3 \cdot (2x + 5)$ noemen we de **productfunctie** van de machtsfunctie $f(x) = x^3$ en de eerstegraadsfunctie $g(x) = 2x + 5$.

Productregel

De afgeleide van een product van twee functies is de som van deze producten waarin telkens een functie vervangen wordt door haar afgeleide.

$$D(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot Df(x) + f(x) \cdot Dg(x)$$

De afgeleide in elk product schrijven we als laatste factor.

Voorbeelden

We berekenen de afgeleiden met de productregel.

$$\begin{aligned} D\big(x^3(2x+5)\big) &= (2x+5)\cdot D(x^3) + x^3\cdot D(2x+5) \\ &= (2x+5)\cdot 3x^2 + x^3\cdot 2 = 6x^3 + 15x^2 + 2x^3 = 8x^3 + 15x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\big((x^2+6)(2x+3)\big) &= (2x+3)\cdot D(x^2+6) + (x^2+6)\cdot D(2x+3) \\ &= (2x+3)\cdot 2x + (x^2+6)\cdot 2 = 4x^2 + 6x + 2x^2 + 12 = 6x^2 + 6x + 12 \end{aligned}$$

Afgeleide van een product van drie functies

Om de afgeleide te berekenen van de productfunctie $p(x) = f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ passen we de productregel tweemaal toe.

$$\begin{aligned} Dp(x) &= D\big(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\big) \\ &= D\big[f(x)\cdot\big(g(x)\cdot h(x)\big)\big] && \textbf{associatieve eigenschap} \\ &= \big(g(x)\cdot h(x)\big)\cdot Df(x) + f(x)\cdot D\big(g(x)\cdot h(x)\big) && \textbf{productregel} \\ &= g(x)\cdot h(x)\cdot Df(x) + f(x)\cdot\big(h(x)\cdot Dg(x) + g(x)\cdot Dh(x)\big) && \textbf{productregel} \\ &= g(x)\cdot h(x)\cdot Df(x) + f(x)\cdot h(x)\cdot Dg(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot Dh(x) && \textbf{distributieve eigenschap} \end{aligned}$$

Voor de afgeleide van een product van drie functies geldt de volgende rekenregel:

$$\mathbf{D\big(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\big) = g(x)\cdot h(x)\cdot Df(x) + f(x)\cdot h(x)\cdot Dg(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot Dh(x)}$$

Voorbeeld

We berekenen de afgeleide met de productregel.

$$\begin{aligned} D\big((x+1)(x+2)(3x+4)\big) &= (x+2)(3x+4)\cdot D(x+1) + (x+1)(3x+4)\cdot D(x+2) + (x+1)(x+2)\cdot D(3x+4) \\ &= (3x^2+4x+6x+8)\cdot 1 + (3x^2+4x+3x+4)\cdot 1 + (x^2+2x+x+2)\cdot 3 \\ &= 3x^2+4x+6x+8+3x^2+4x+3x+4+3x^2+6x+3x+6 \\ &= 9x^2+26x+18 \end{aligned}$$

2

Bereken op twee manieren.

1 $D\big(2x(x+3)\big) =$ ....

....

$D\big(2x(x+3)\big) =$ ....

2 $D\big(x^3(2x-5)\big) =$ ....

....

$D\big(x^3(2x-5)\big) =$ ....

3 $D\big(-x^4(x^3-3x-1)\big) =$ ....

....

....

$D\big(-x^4(x^3-3x-1)\big) =$ ....

4 $D\big(3x^5(2x^2-2x+1)\big) =$ ....

....

....

$D\big(3x^5(2x^2-2x+1)\big) =$ ....

3

Bereken met de productregel.

1 $D\big((2x-5)(3x-1)\big) =$

....

....

....

2 $D\big((1-2x^2)(x^2+3)\big) =$

....

....

....

3 $D\big((1-x^5)(1-2x^3)\big) =$

....

....

....

4 $D\big((x^2-5x+1)(x^2+x+3)\big) =$

....

....

....

....

4

Bereken met de productregel.

1 $D\left(x(x^2-2)(x^2-3)\right) =$

....

....

....

....

2 $D\left((x+2)(x^2+2)(x^3+2)\right) =$

....

....

....

....

5

Er is een personeelslid in een bedrijf besmet met een virus, waardoor hij ziek is geworden. Deze ziekte is besmettelijk gedurende de periode die verloopt tussen de besmetting en het uitbreken van de eerste symptomen.

Het gemiddelde percentage p van collega's die na d dagen worden besmet, voldoet aan de formule $p(d) = 0{,}005d^2(15-d)$.

1 Wat is de incubatietijd van deze ziekte?

....

....

....

....

....

2 Wanneer is de ziekte het meest besmettelijk?

Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

....

....

....

....

3 Hoeveel van de 680 personeelsleden kunnen op deze dag besmet worden?

Afgeleiden van machten van veeltermfuncties

6 Instap

Gegeven is de functie $f(x) = x^4$.

1 Bereken de derdemacht $p(x) = \left(f(x)\right)^3$.

....

2 Bepaal het voorschrift van de afgeleide functies f' en p'.

....

3 Zijn de volgende beweringen juist?

a $p'(x) = \left(f'(x)\right)^3$

....

....

....

b $p'(x) = 3\left(f(x)\right)^2 \cdot f'(x)$

....

....

....

Afgeleiden van machten van functies

De productfunctie $p(x) = f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)$ noteren we korter als $p(x) = \left(f(x)\right)^3$ of $p(x) = f^3(x)$.

We noemen p de **derdemachtsfunctie** van f.

Met de productregel kunnen we de rekenregel opstellen voor het berekenen van de afgeleide van de derdemachtsfunctie p:

$$\begin{aligned} Dp(x) &= Df^3(x) \\ &= D\left(f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)\right) \\ &= f(x) \cdot f(x) \cdot Df(x) + f(x) \cdot f(x) \cdot Df(x) + f(x) \cdot f(x) \cdot Df(x) && \text{productregel} \\ &= 3 \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot Df(x) && \text{gelijke termen optellen} \\ &= 3 \cdot f^2(x) \cdot Df(x) && \text{gelijke factoren vermenigvuldigen} \end{aligned}$$

Bijgevolg: $Df^3(x) = 3 \cdot f^2(x) \cdot Df(x)$ $\quad$ $p(x) = f^3(x)$

Machtregel

De afgeleide van $f^n(x)$ is n maal $f^{n-1}(x)$ maal de afgeleide van $f(x)$.

$$Df^n(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot Df(x)$$

Voorbeelden

We berekenen de afgeleiden met de machtregel.

$D(x+5)^2 = 2 \cdot (x+5)^1 \cdot D(x+5) = 2(x+5) \cdot 1 = 2(x+5)$

$D(4x+1)^3 = 3 \cdot (4x+1)^2 \cdot D(4x+1) = 3(4x+1)^2 \cdot 4 = 12(4x+1)^2$

7

Bereken.

1 $D(3x-5)^3 =$ ....

....

2 $D(x^2-1)^4 =$ ....

....

3 $D(x^3-2x)^2 =$ ....

....

4 $D(2-3x^2)^3 =$ ....

....

5 $D(2x^3-x^2+3x)^5 =$ ....

....

6 $D(-x^3+5x^2+3x)^4 =$ ....

....

7 $D(3x^3+x^2-9)^7 =$ ....

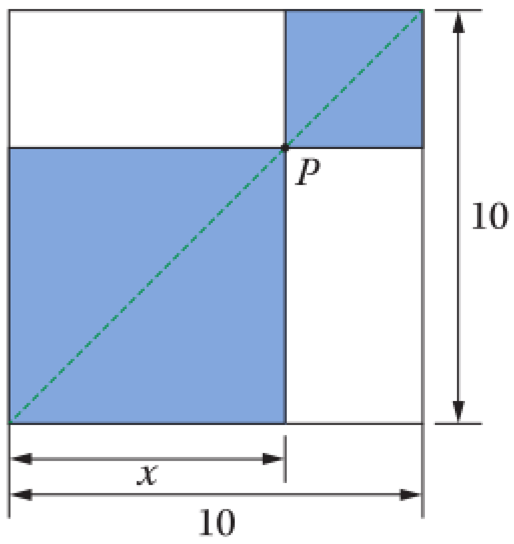
....

8 $D(9x^2-x+5)^{10} =$ ....

....

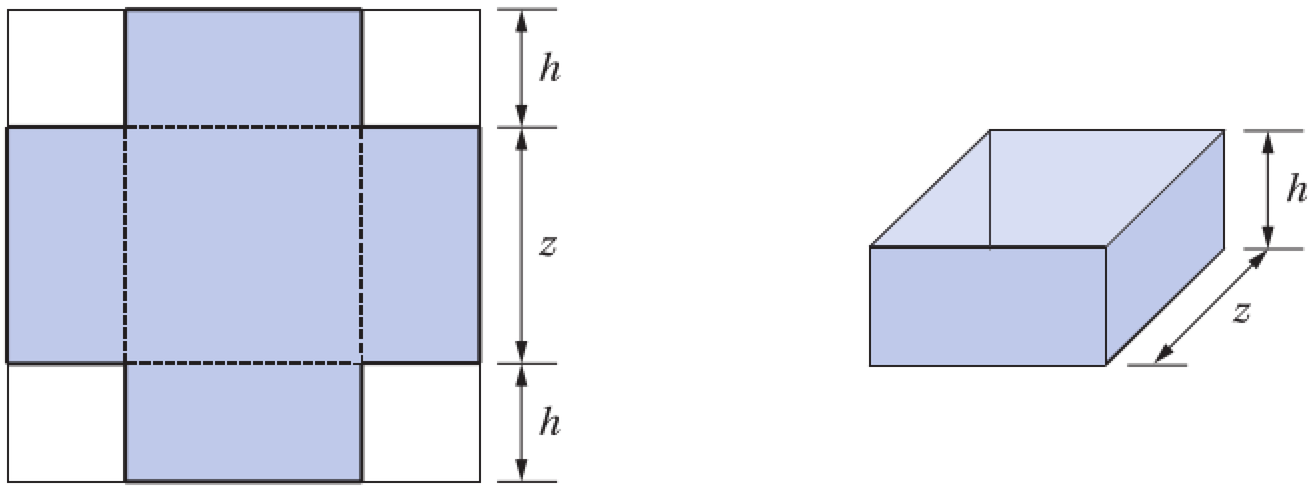
8

Bepaal de plaats van het punt P gelegen op een diagonaal zodat de oppervlakte van de ingekleurde figuur minimaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



9

Van een vierkant stuk karton van 9 m^2 wordt een open doos gevouwen. Bepaal de afmetingen van de doos met de grootste inhoud. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Stel een formule op voor de inhoud V van de doos in functie van de hoogte h.

....

....

....

....

....

....

2 Welke waarden kan de hoogte van de doos aannemen?

....

....

....

3 Voor welke afmetingen is de inhoud van de doos maximaal?

....

....

....

....

....

....

....

4 Wat is de maximale inhoud van de doos?

Uitdagingen

1 Bereken.

1 $D\big((x^2-4)(2x^3-1)(x^4+2)\big)$

2 $D\big((3x^4-2x^3+x+1)(x^2-x+1)\big)$

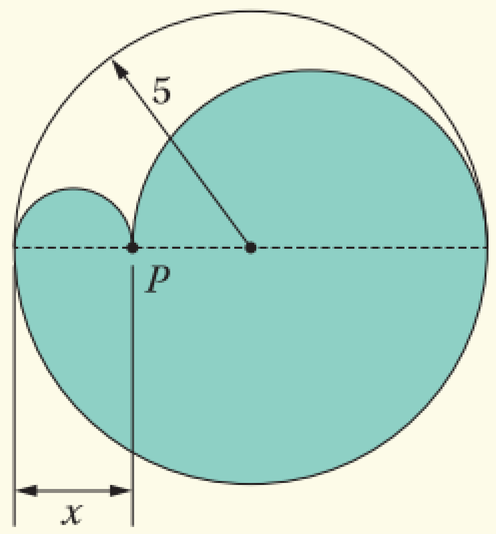
3 $D\big(5(x+3)(x-2)\big)$

4 $D\big(x^3(2x+1)(x^2-2)\big)$

5 $D\big((3x+1)(4-x)(5x-2)\big)$

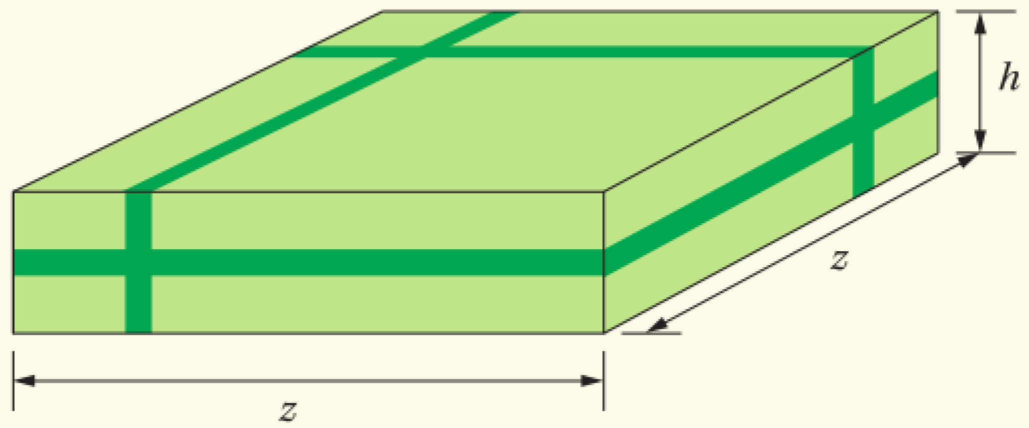
zie pagina 362

2 Bepaal de plaats van het punt P gelegen op een middellijn zodat de oppervlakte van de ingekleurde figuur minimaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



zie pagina 363

3 Een doos met een vierkante bodem is op de volgende wijze met een touw van 24 cm ingesnoerd. Bepaal de afmetingen van de doos waarvoor de inhoud maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Stel een formule op voor de inhoud V van de doos in functie van de zijde z.

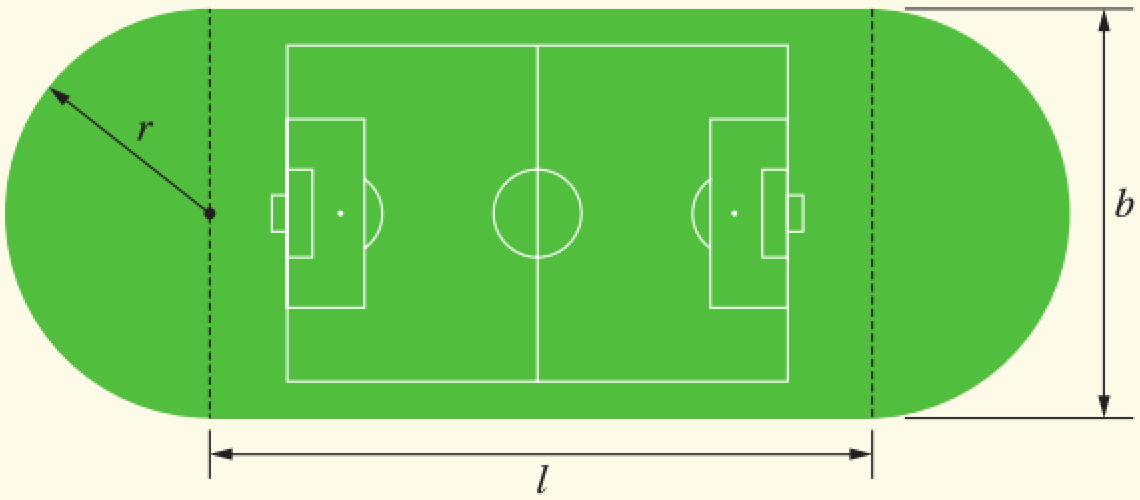
2 Welke waarde kan de zijde van de doos aannemen?

3 Voor welke afmetingen is de inhoud van de doos maximaal?

4 Wat is de maximale inhoud van de doos?

zie pagina 364

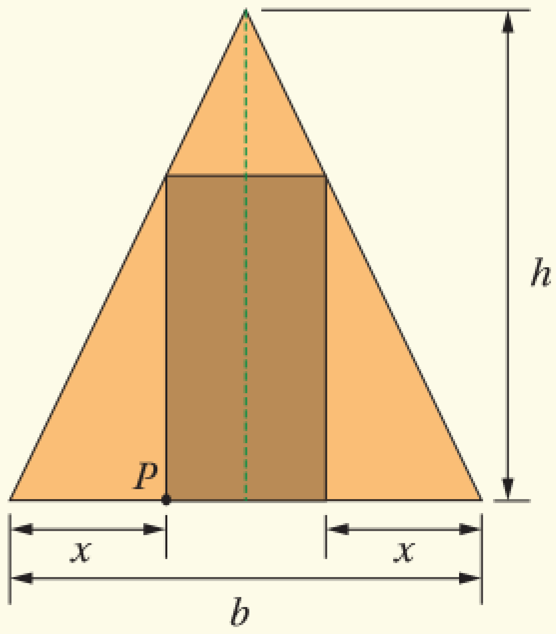
4 In een sportstadion wordt een voetbalveld met daarrond een 400 meter lange atletiekpiste aangelegd. Het grasveld bestaat uit een rechthoek met twee halve cirkels. Bepaal de afmetingen van de rechthoek waarvoor de oppervlakte maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1. Stel een formule op voor de oppervlakte A van de rechthoek in functie van de straal r.
2. Welke waarden kan r aannemen?
3. Voor welke afmetingen van de rechthoek is de oppervlakte maximaal?
4. Wat is de maximale oppervlakte van het grasveld in are?

zie pagina 365

5 Gegeven is een gelijkbenige driehoek met basis b en hoogte h. Bepaal de plaats van het punt P gelegen op de basis zodat de oppervlakte van de ingekleurde rechthoek maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



zie pagina 367

6 Bereken.

1. $D\left(x+(x+10)^3\right)$
2. $D\left(x\,(x+10)^3\right)$
3. $D\left(x^3\,(2x-1)^5\right)$
4. $D\left((1+x)^2(1-x)^2\right)$

zie pagina 368

7 Gegeven is $p(x)=f(x)\cdot g(x)$.
Toon met de formule van de afgeleide functie aan dat $p'(x)=g(x)\cdot f'(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

zie pagina 369

Trefwoordenregister

Uitdagingen van pagina 17

1 De grafiek van een machtsfunctie $f(x) = ax^n$ gaat door de punten $P(-1, -4)$ en $Q(2, 32)$.
Bereken de coëfficiënt a en de exponent n van deze machtsfunctie.

terug naar pagina 17

2 Gegeven zijn de machtsfuncties $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $g(x) = \frac{1}{4}x^4$ en $h(x) = \frac{1}{5}x^5$.

1. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A, B en C.
Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

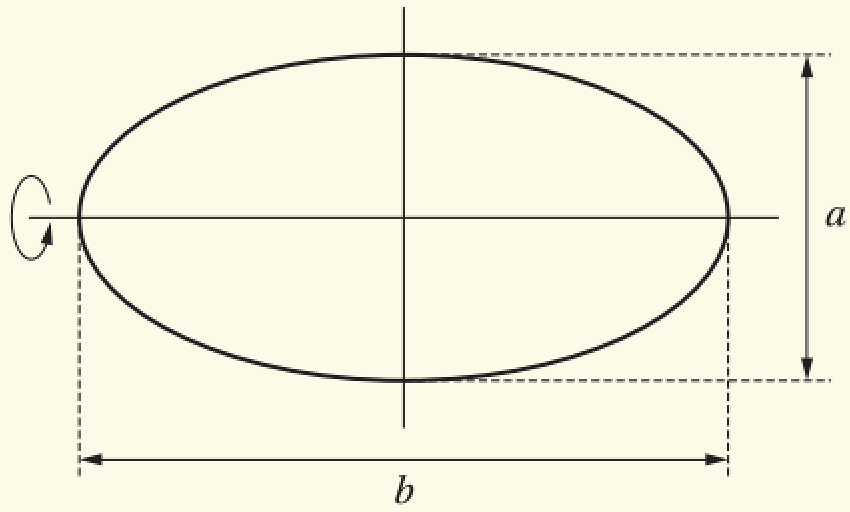
2. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A', B' en C'.
Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

3. Een verticale rechte gaat door het punt met coördinaten $(-1, 0)$ en snijdt de grafieken van f, g en h in de punten A'', B'' en C''.
Welk punt ligt het laagst? En welk punt het hoogst?

terug naar pagina 17

Uitdagingen van pagina 42 tot 49

1 Draaien we een ellips om een symmetrieas, dan ontstaat een ruimtelijk lichaam dat we ellipsoïde noemen. De inhoud van een ellipsoïde berekenen we met de formule
$V = \frac{1}{6}\pi a^2 b$.





Bepaal voor de ellipsoïde een functievoorschrift dat de inhoud beschrijft in functie van *a* of *b* en geef de specifieke benaming van de functie.

1 De diameter *b* is gelijk aan 6 cm.

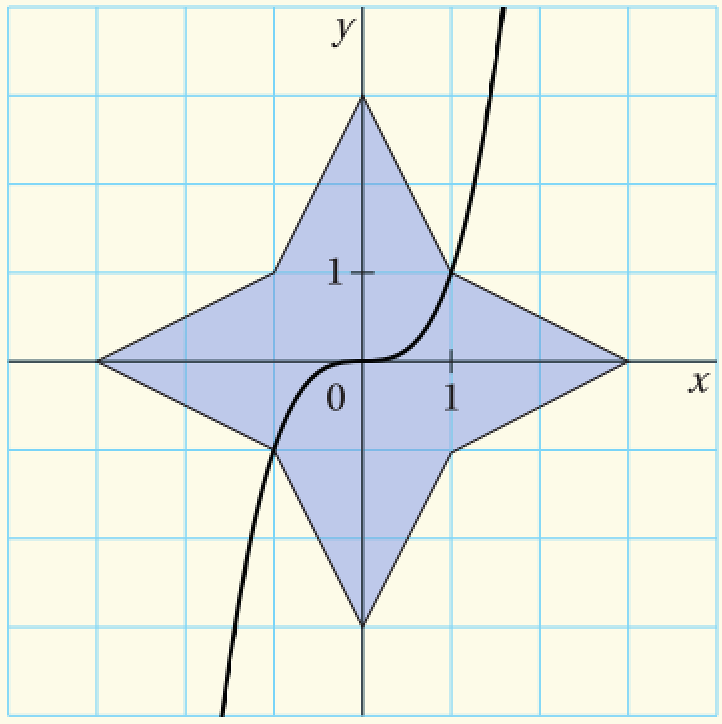
2 De diameter *a* is gelijk aan 6 cm.

3 De diameter *b* is tweemaal zo groot als de diameter *a*.

4 De diameters *a* en *b* zijn gelijk. Welk lichaam verkrijgen we in dit geval?

terug naar pagina 42

2 Gegeven is de derdegraadsfunctie $f(x) = x^3 + p$. Voor welke waarden van p gaat de grafiek van deze functie door de hoekpunten van de ster? Controleer de rekenresultaten met ICT.



1 Hoekpunt (3, 0)

2 Hoekpunt (1, 1)

3 Hoekpunt (0, 3)

4 Hoekpunt (–1, 1)

5 Hoekpunt (–3, 0)

6 Hoekpunt (–1, –1)

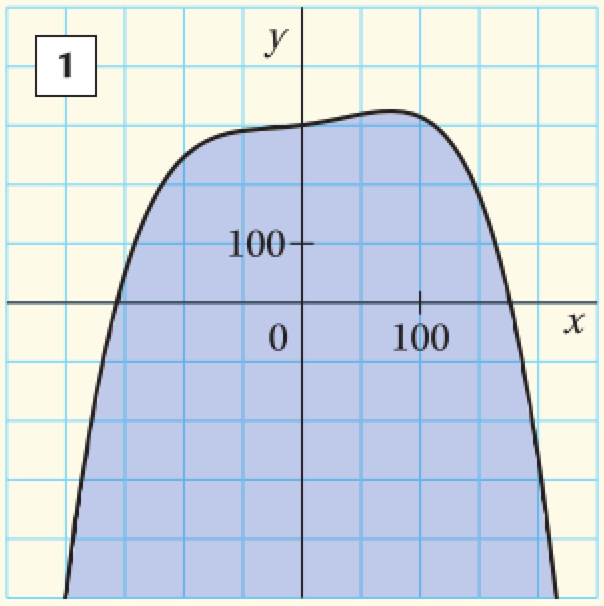
7 Hoekpunt (0, –3)

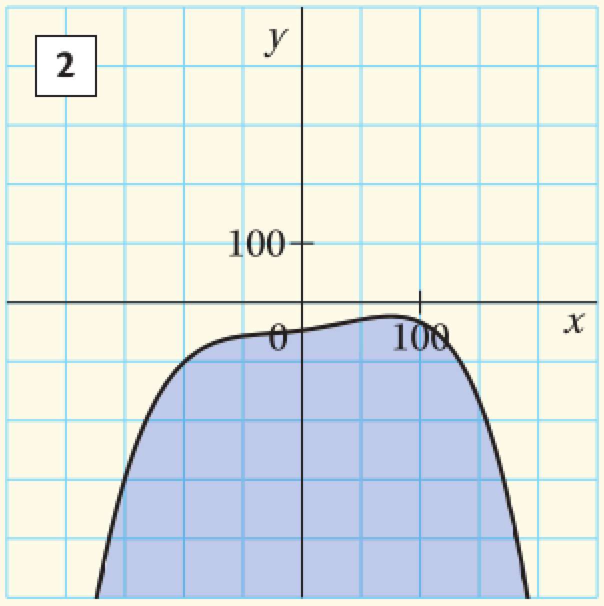
8 Hoekpunt (1, –1)

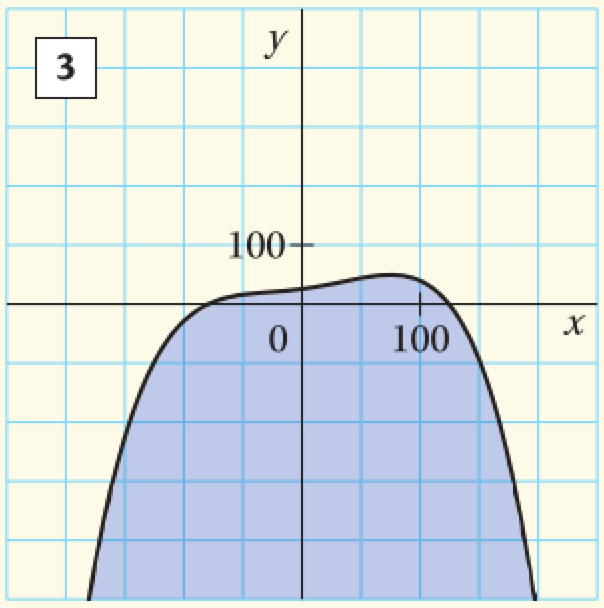
terug naar pagina 42

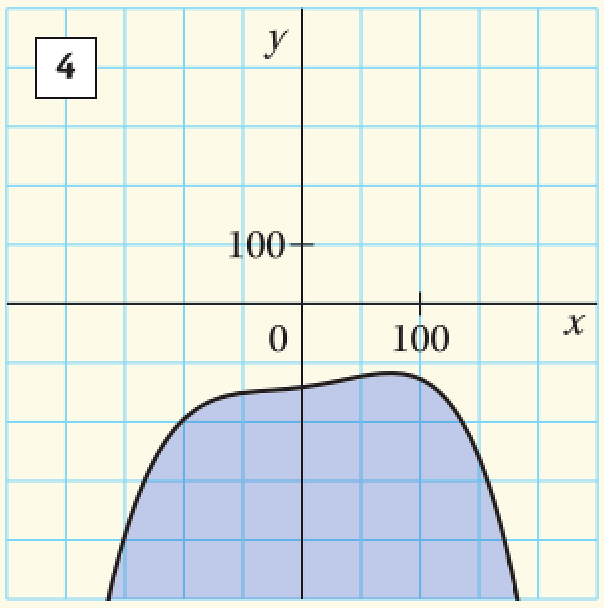
3 Tijdens de beklimming van een steile bergwand observeren twee alpinisten eenzelfde berg vanuit vier standplaatsen. Het profiel van de geobserveerde bergtop is afgebeeld met de grafieken van hogeregraadsfuncties. De oorsprong van elk assenstelsel ligt op dezelfde hoogte als een standplaats van de alpinisten. De afstanden x en y zijn uitgedrukt in meter.











Standplaats 1: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x + 300$

Standplaats 2: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x - 48$

Standplaats 3: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x + 25$

Standplaats 4: $f(x) = -0{,}0000005x^4 + 0{,}000008x^3 + 0{,}003x^2 + 0{,}26x - 142$

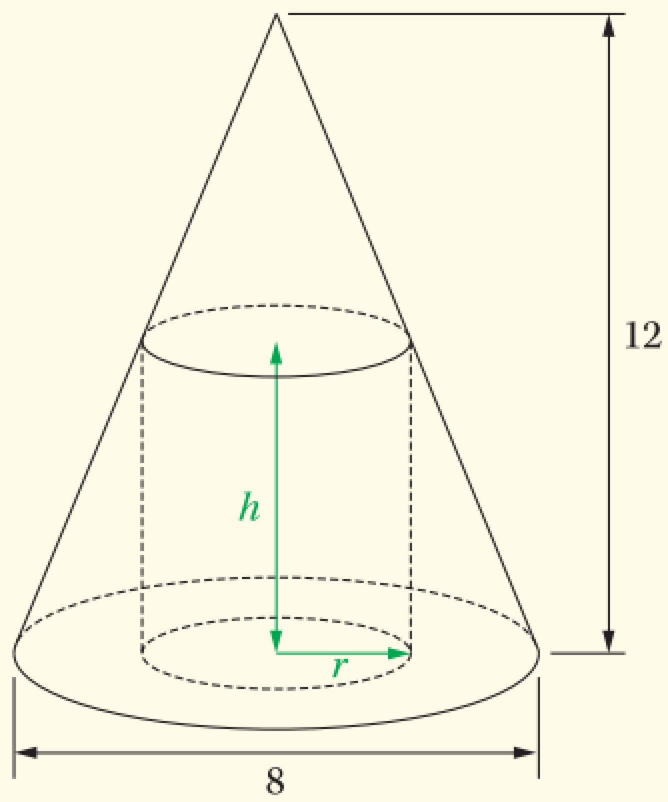
1 Waar is de klimroute tussen standplaats 1 en standplaats 4 dalend?

2 Wat zijn de verschillen tussen de vier functievoorschriften die het bergprofiel beschrijven?

3 Wat is het hoogteverschil tussen standplaats 1 en standplaats 4?

terug naar pagina 43

4 Een cilinder met straal r en hoogte h is ingeschreven in een kegel. De diameter van het grondvlak van de kegel is 8 cm en de hoogte is 12 cm.



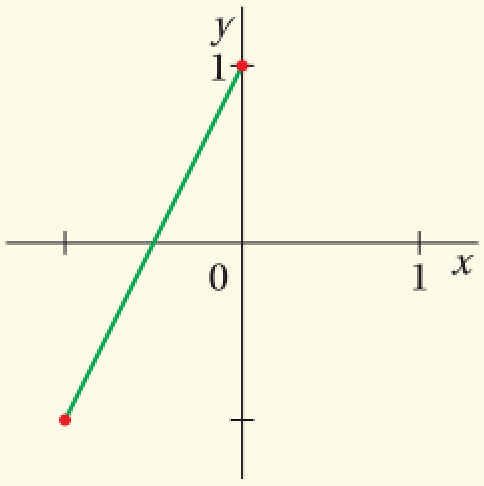
1 Druk de hoogte h van de cilinder uit in functie van de straal r.

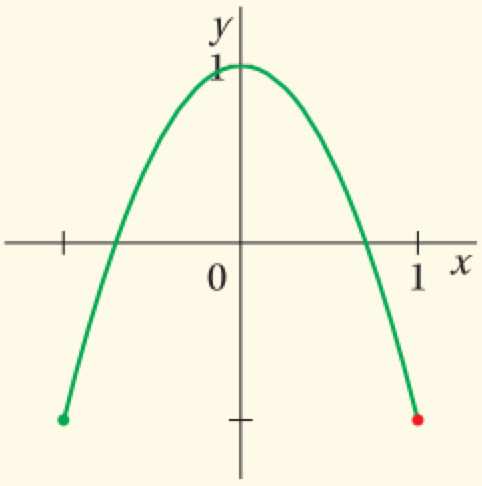
2 Stel een functievoorschrift op dat het volume van de cilinder uitdrukt in functie van r.

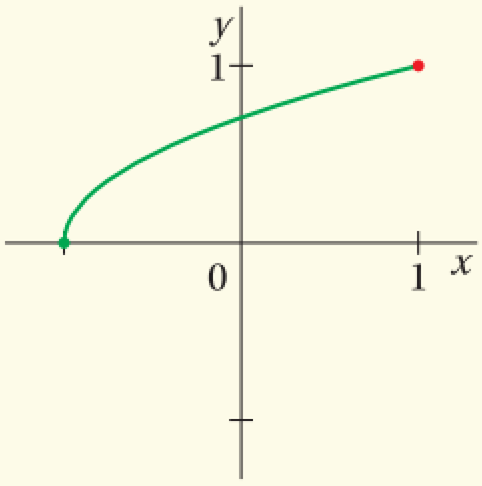
3 Bepaal de graad en de specifieke benaming van de veeltermfunctie.

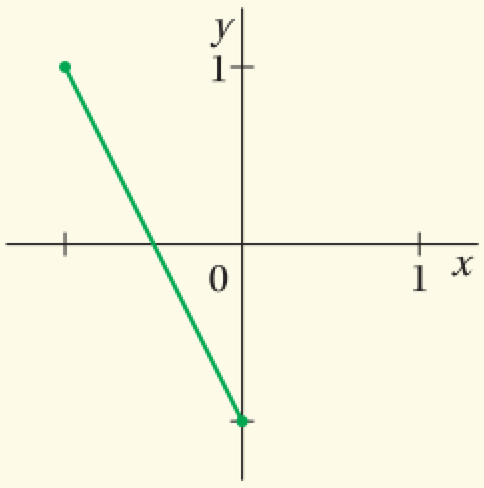
terug naar pagina 44

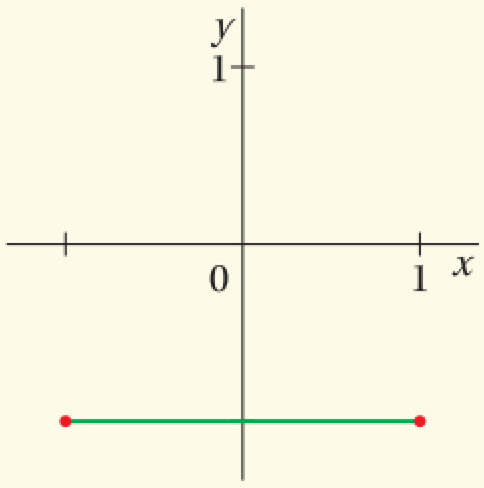
5 Bepaal het domein en het bereik van de functie.

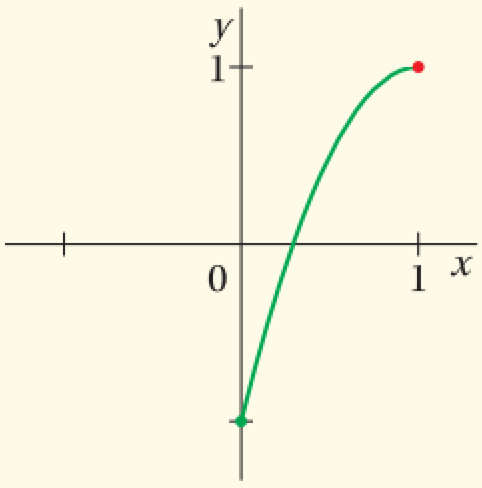
1


2


3


4


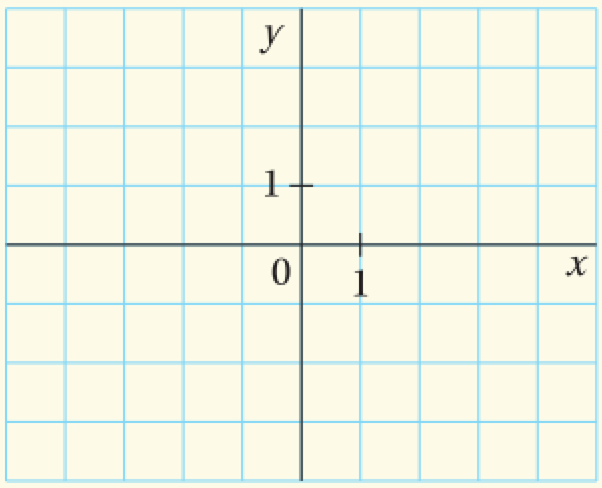
5


6


terug naar pagina 44

6 Van een functie f zijn het domein en het bereik gegeven.
Teken de grafiek als we weten dat deze grafiek een deel is van een stijgende rechte.

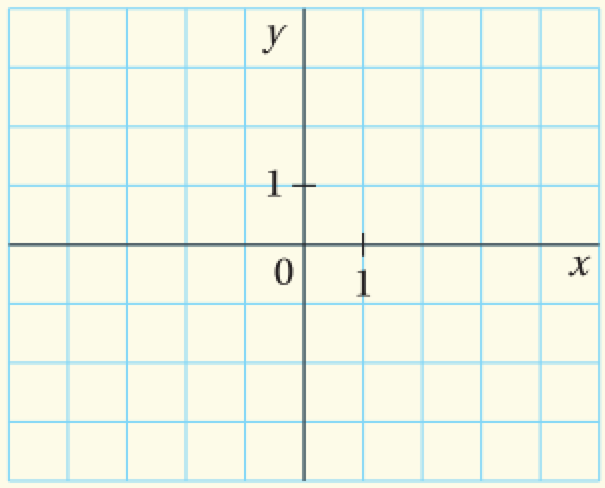
1



dom f = [–1, 3]

ber f = [–2, 2]

2

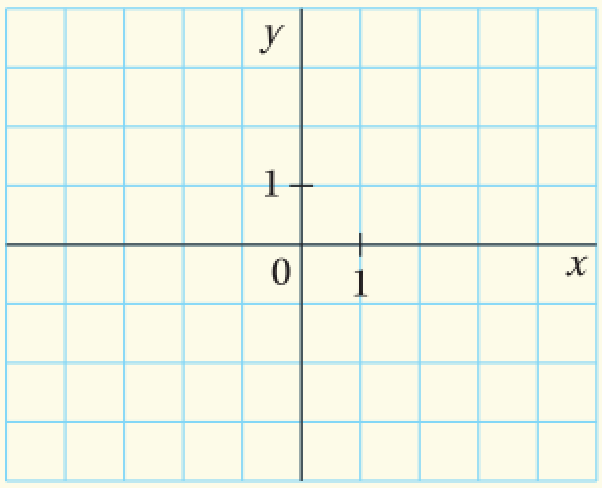


dom f =]–4, 1[

ber f =]–3, 2[

Teken de grafiek als we weten dat deze grafiek een deel is van een dalende rechte.

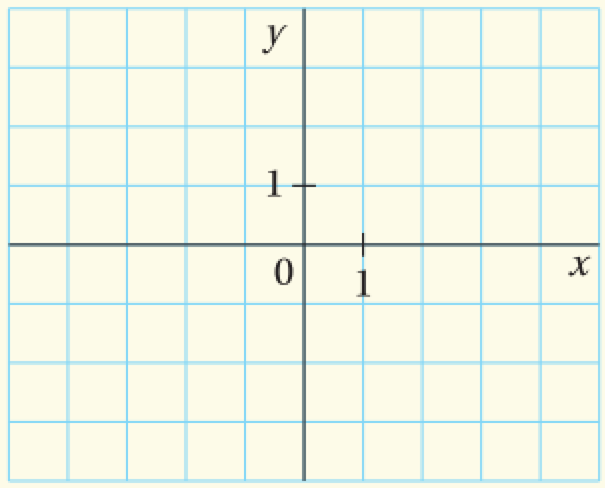
3



dom f =]–3, 3]

ber f = [–3, 2[

4



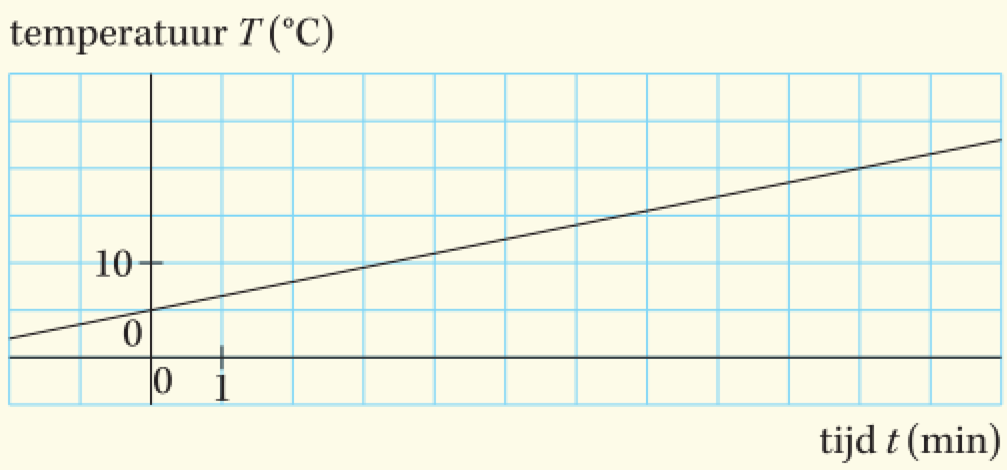
dom f = [–4, 2[

ber f =]–3, 1]

terug naar pagina 45

7 Een blikje cola heeft een temperatuur van 5 °C als het uit de ijskast wordt genomen. De opwarming van het blikje gebeurt gelijkmatig tot 20 °C kamertemperatuur.

1 Duid op de grafiek het deel aan dat past bij de beschrijving.



2 Wat is de gemiddelde temperatuurstijging per minuut?

3 Bepaal het functievoorschrift en het werkdomein.

terug naar pagina 45

8 Een blok ijs met afmetingen 20 × 30 × 40 cm heeft een groter volume dan een bol ijs met een diameter van 30 cm. Elke minuut smelt aan elke kant 1 cm ijs weg. Het volume van het blok en de bol ijs in functie van de tijd kunnen we beschrijven met de formules

$V_{blok} = (20 - 2t)(30 - 2t)(40 - 2t)$

$V_{bol} = \frac{4}{3}\pi(15 - t)^3$

V: volume in cm^3
t: tijd in min

1 Bereken het volume van het blok en de bol gedurende de eerste 12 minuten.
Vul de tabel aan op 1 cm^3 nauwkeurig.

tijd t (min)	volume blok ijs V_{blok} (cm^3)	volume bol ijs V_{bol} (cm^3)
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

2 Na hoeveel minuten is het volume van de bol groter dan het volume van het blok?

3 Na hoeveel minuten is het blok ijs volledig gesmolten?
En de bol?

4 Hoe groot is de diameter van de bol op het ogenblik dat het blok volledig gesmolten is?

terug naar pagina 46

9 Het verbrandingsproces van een kaars verloopt volgens de formule $h = 20 - 0{,}2t^2$ waarin t de tijd in uren voorstelt en h de hoogte van de kaars in cm. Na hoeveel tijd is de hoogte van deze kaars gehalveerd?

terug naar pagina 46

10 Janne en Ward nemen deel aan een trektocht van 20 km. Janne stapt aan een constante snelheid van 4 km per uur. De tussentijden van Ward, geregistreerd door de controleposten, voldoen aan de formule

$$s = \frac{1}{120}(17t^4 - 162t^3 + 487t^2 + 18t)$$

s : afstand in km
t : tijd in uur

1 Teken met ICT de afstand-tijdgrafieken van Janne en Ward.

Stel het kijkvenster in als volgt: $x_{min} = 0$ $x_{max} = 6$ $y_{min} = 0$ $y_{max} = 25$

2 Wanneer haalt Ward Janne voor de eerste keer in?

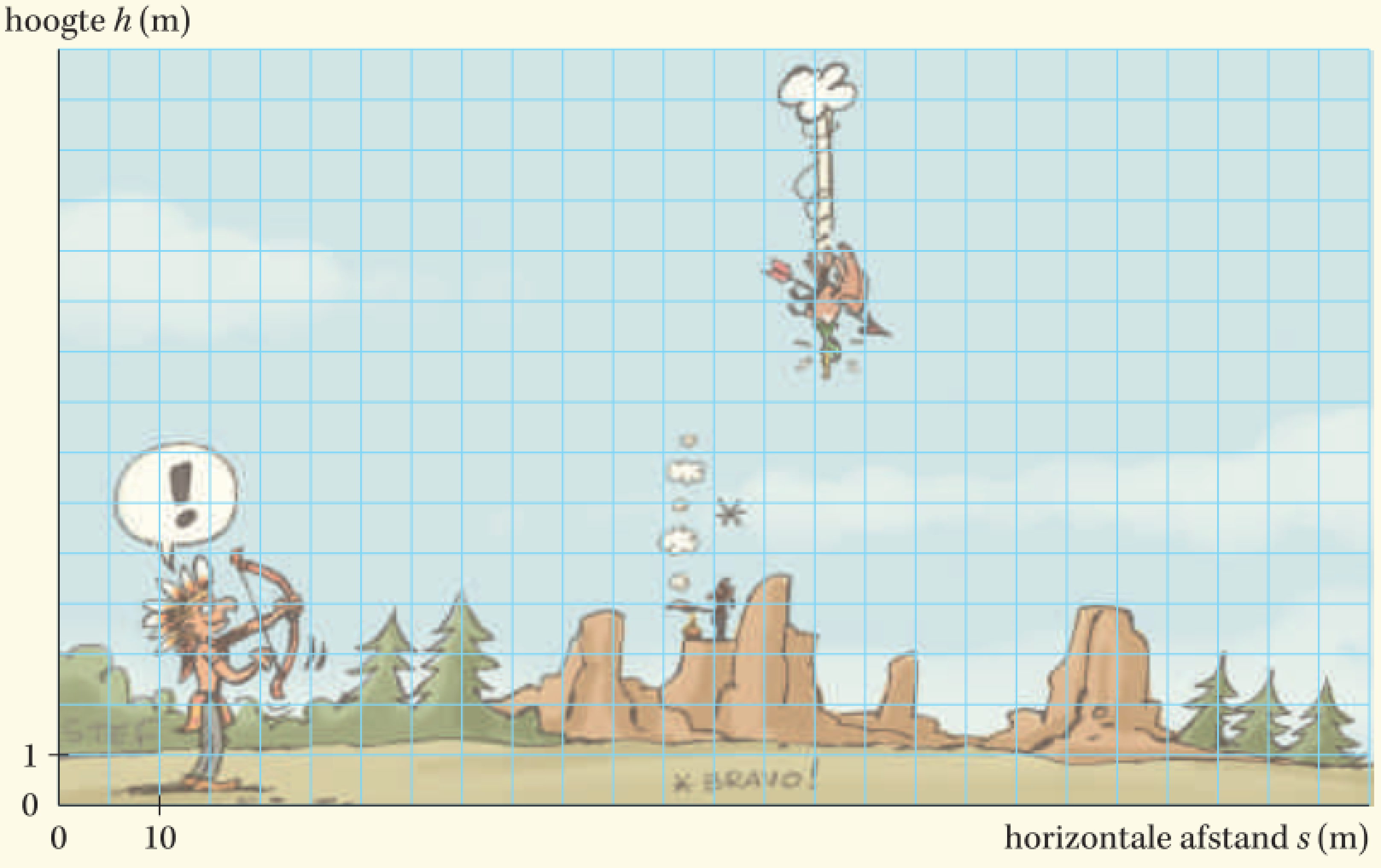
Hoeveel kilometer hebben ze dan afgelegd?

3 Wie komt als eerste aan?

terug naar pagina 47

11 Witte Veder schiet met pijl en boog naar een overvliegende arend. De vlucht van de arend kunnen we beschrijven met de formule $h = 0{,}00001s^3 + 0{,}08s + 5$. De baan van de pijl voldoet aan de formule $h = -0{,}0032s^2 + 0{,}368s + 1{,}92$. In beide formules stelt s de horizontale afstand in meter voor en h de bijbehorende hoogte eveneens in meter.

1 Stel de vlucht van de arend en de baan van de pijl grafisch voor in het assenstelsel.



2 Waarom heeft Witte Veder twee kansen om de arend te treffen?

3 Op welke hoogte kan de arend getroffen worden door de pijl?

terug naar pagina 47

12 Teken de grafiek van de functie f.

1 $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{als} \quad x<0 \\ -2x+1 & \text{als} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0{,}5x-2 & \text{als} \quad x>2 \end{cases}$

2 $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2+4 & \text{als} \quad x \leqslant 0 \\ -(x-3)^2+4 & \text{als} \quad x>0 \end{cases}$

13 Simon en Lukas deden mee aan een halve triatlon: 3 km zwemmen, 75 km fietsen en 24 km lopen. In de tabel lezen we hun gemiddelde snelheid af over elke discipline.

	zwemmen	fietsen	lopen
Simon	3 km/h	30 km/h	12 km/h
Lukas	4 km/h	25 km/h	16 km/h

1 Stel de prestatie van Simon en van Lukas voor met een grafiek die uit drie aaneensluitende lijnstukken bestaat.

2 Wie bereikte als eerste de finish?

3 Hoe groot was de voorsprong?

4 Welke betekenis hebben de snijpunten van beide grafieken?

5 Wie lag aan de leiding na 4 uur?

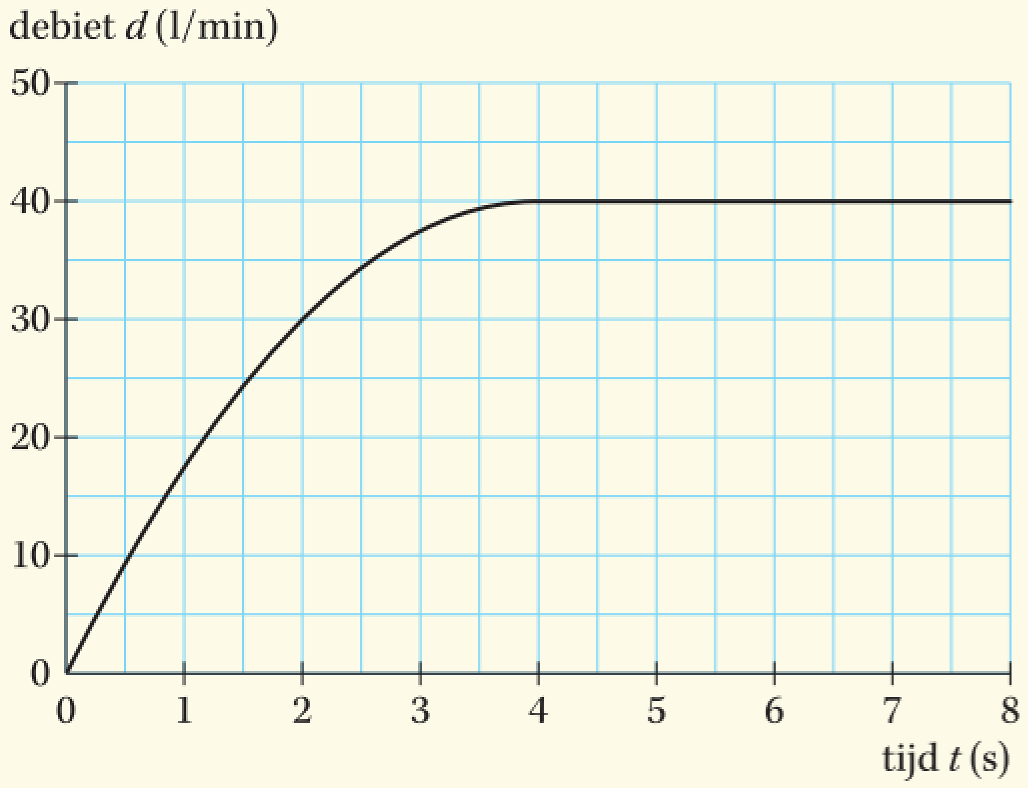
6 Wat is de gemiddelde snelheid van Simon en van Lukas over deze halve triatlon?

7 Noteer het drievoudig voorschrift dat het koersverloop weergeeft van Simon.
De richtingscoëfficiënt van elk lijnstuk komt overeen met de bijbehorende snelheid.
De vergelijking van de rechten kunnen we opstellen met de formule voor punt en rico: $y - y_A = a(x - x_A)$.



terug naar pagina 48

14 Het debiet van een tuinslang is weergegeven met de volgende grafiek.





1 In hoeveel seconden kunnen we de sproeikop van de tuinslang volledig opendraaien?

2 Wat is het debiet van deze tuinslang?

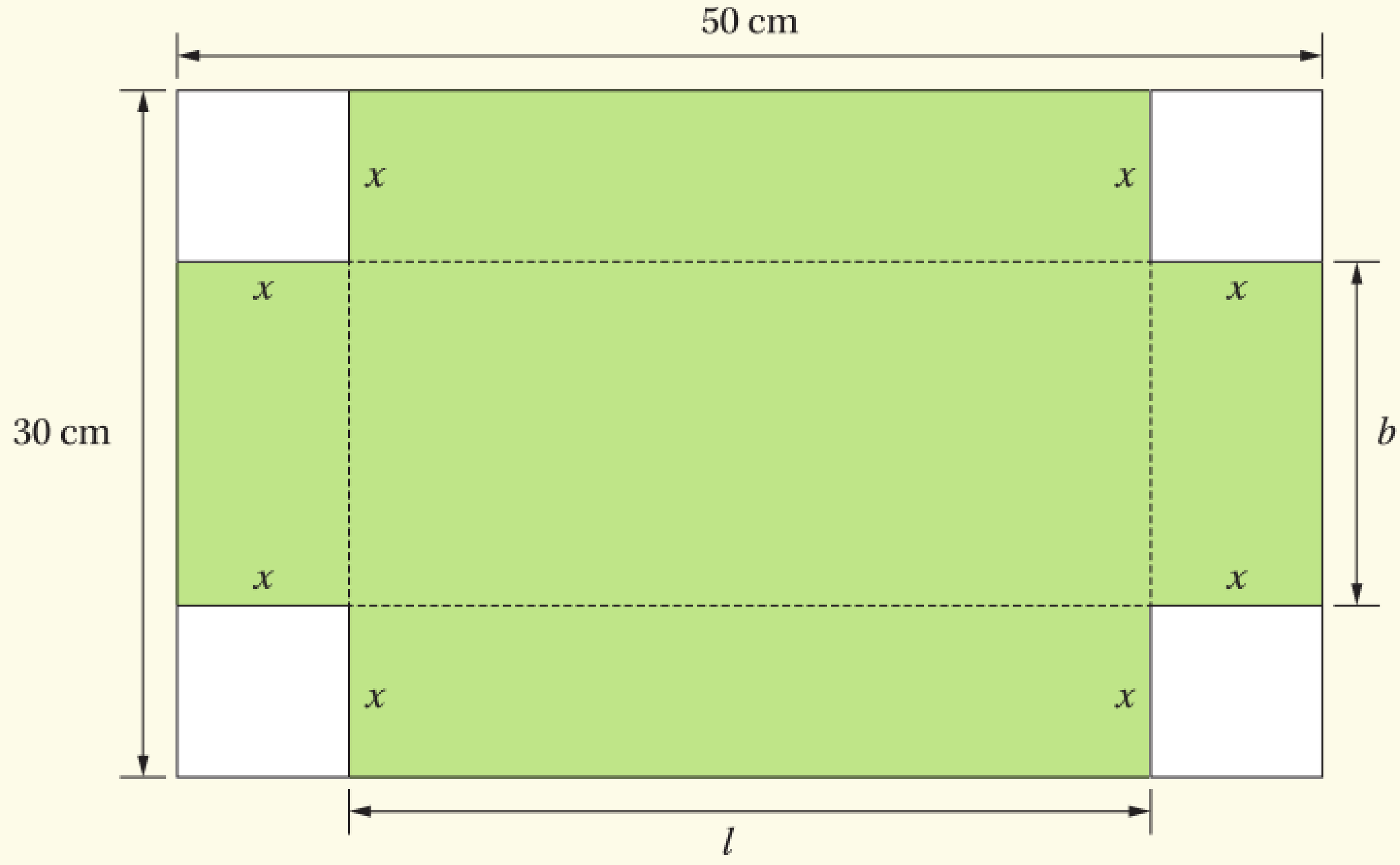
3 Het tweevoudig voorschrift van deze grafiek bestaat uit een tweedegraadsfunctie en een constante functie. Stel het voorschrift op.

4 Controleer het voorschrift met ICT.

terug naar pagina 49

Uitdagingen van pagina 103 tot 107

1 We knippen aan de vier hoeken van een rechthoekig stuk karton van 30 cm bij 50 cm vier gelijke vierkanten met zijde x cm weg. Het overblijvende deel vouwen we tot een doos zonder deksel.



1 De lengte l, breedte b en hoogte h van de doos zijn functies van x. Noteer deze functies met de formulenotatie.

2 Schrijf het volume van de doos als een functie van x. Noem de functie f en vul het functievoorschrift aan met het werkdomein.

3 Waarom is het getal 15 geen nulwaarde van f?

terug naar pagina 103

2 Bij het wegontwerp van een autosnelweg wordt de bestaande helling van de bodem langs de aan te leggen weg beschreven met de functie $w(x) = -0{,}1x^4 + 0{,}5x^2 - 0{,}3$ in de sectie $[-2{,}25\,;\,2{,}25]$. De wegas valt samen met de x-as en de eenheid op de x-as en de y-as komt overeen met 100 meter.

1 Teken met ICT de grafiek.

2 Hoeveel stroken grond moeten er in de beschreven sectie afgegraven worden om de ontworpen rijweg aan te leggen?

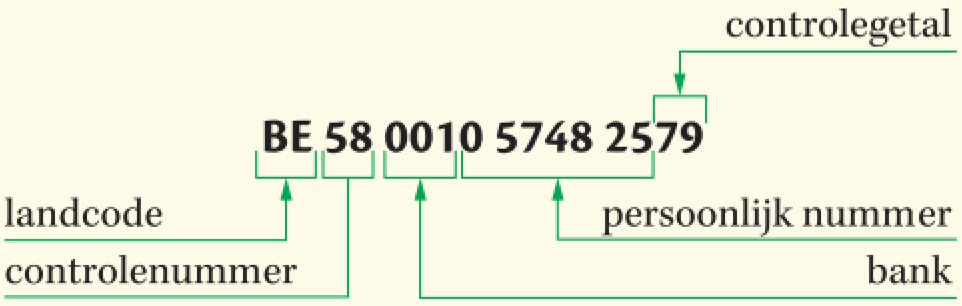
3 Hoe lang zijn de af te graven stroken?

4 Wat is de lengte van het aan te leggen viaduct boven de vallei?

5 Hoe hoog is de middelste pijler van het viaduct, gemeten vanaf de grond tot het wegdek?

terug naar pagina 103

3 Het IBAN-nummer (International Bank Account Number) van een bankrekening bestaat uit een landcode van twee letters, een controlenummer van twee cijfers gevolgd door het nationaal rekeningnummer van 12 cijfers. De eerste drie cijfers van dit nummer duiden de bank aan, de volgende groep van zeven cijfers is het persoonlijk nummer van de klant en de laatste twee cijfers vormen het controlegetal.



Het controlegetal is de rest van een deling. Het deeltal bestaat uit de eerste 10 cijfers van het nationaal rekeningnummer en de deler is altijd 97. We controleren de juistheid van het rekeningnummer 001057482579.



$10574825 = 97 \cdot 109018 + 79$

1 0 5 7 4 8 2 5	9 7
− 9 7	1 0 9 0 1 8
8 7 4	
− 8 7 3	
1 8 2	
− 9 7	
8 5 5	
− 7 7 6	
7 9	

1 Vul het IBAN-nummer aan met het controlegetal van het rekeningnummer.

a BE75 0010 1234 56 ....

1 0 1 2 3 4 5 6

b BE91 0010 9876 54 ....

1 0 9 8 7 6 5 4

2 Reken het controlegetal van je eigen rekeningnummer na. Als de rest 0 is, wordt 97 als controlegetal gebruikt.

terug naar pagina 104

4 Bepaal het quotiënt en de rest van de deling. Schrijf het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest.

1 $(2x^3 + x^2 + 1) : (4x^2 + 5)$

2 $\left(x^4 + 3x^2 + \frac{8}{9}\right) : (3x^2 + 1)$

terug naar pagina 104

5 We ontbinden de veelterm $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ in twee factoren. Als de ene factor $x^2 + x + 1$ is, dan is de tweede factor

(A) $x^6 + 1$ **(B)** $x^6 + x^3 + 1$ **(C)** $x^6 + x^4 + x^2 + 1$

(D) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ **(E)** $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

terug naar pagina 104

6 Als $x^2 - x - 1$ een deler is van $ax^3 + bx^2 + 1$, dan is b gelijk aan

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

Vlaamse Wiskunde Olympiade

terug naar pagina 105

7 Bepaal p zodat de deling $(2x^3 + 7x^2 + px + 3) : (2x^2 + x + 1)$ opgaat.

terug naar pagina 105

8 Als $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ deelbaar is door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ dan is $p \cdot (q + r)$ gelijk aan

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21

Ingangsexamen arts

terug naar pagina 105

9 Bepaal p zodat de delingen $(x^3 - 2x^2 - 2px + 3) : (x - 2)$ en $(x^3 + 3x^2 - px + 5) : (x + 2)$ dezelfde rest hebben.

terug naar pagina 105

10 Bepaal p en q zodat de veelterm $D(x) = x^4 + px^2 + qx + p$ deelbaar is door $x - 3$ en door $x + 2$.

terug naar pagina 105

11 Bepaal p zodat de deling $(x^2 - 4px + 2p^2) : (x - 2)$ een rest gelijk aan p heeft.

terug naar pagina 105

12 Kenmerken van deelbaarheid door $x - 1$ en door $x + 1$.

1 Onder welke voorwaarde voor de coëfficiënten is de veelterm $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deelbaar door $x - 1$?

2 Onder welke voorwaarde voor de coëfficiënten is de veelterm $D(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ deelbaar door $x + 1$?

3 Gegeven zijn de veeltermen:

$D_1(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

$D_2(x) = 4x^3 - 5x^2 - x + 2$

$D_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 1$

$D_4(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

$D_5(x) = -3x^3 - 2x^2 - 1$

$D_6(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

Welke veeltermen zijn deelbaar door $x - 1$? Door $x + 1$? Door $x - 1$ en door $x + 1$?

terug naar pagina 105

13 We onderzoeken het kenmerk van deelbaarheid door $(x - a)(x - b)$.
Gegeven is de veelterm $D(x) = x^7 - x^5 + 7x^2 - 7$.

1 Toon aan dat $D(x)$ deelbaar is door $x - 1$ en door $x + 1$.

2 Toon aan dat $D(x)$ deelbaar is door het product $(x-1)(x+1)$.

3 Vervolledig het kenmerk van deelbaarheid door $(x-a)(x-b)$.

Een veelterm D(x) is deelbaar door (x – a) (x – b) met a ≠ b als ....

4 Toon aan dat $D(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 18$ deelbaar is door $(x-2)(x+3)$ zonder de deling uit te voeren.

terug naar pagina 106

14 Toon aan dat de veelterm $D(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$ deelbaar is door $x^2 - x - 2$ zonder de deling uit te voeren.

terug naar pagina 106

15 Bepaal het voorschrift van een derdegraadsfunctie met nulwaarden 0, 2, –2 en waarbij $f(-1) = 6$.

terug naar pagina 106

16 Los op zonder ICT.

1 $x^2(x-2)-(x-2)=0$

2 $(x+3)(x-4)^2-(x+3)=0$

3 $(x-2)(x^2-4)^2-(x-2)=0$

4 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

5 $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

6 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x = 0$

7 $3x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$

8 $x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$

terug naar pagina 106

17 De functie $f(x) = x^4 - 14x^3 + 68x^2 - 136x + 96$ heeft een dubbele nulwaarde 2. Bepaal zonder ICT alle nulwaarden.

terug naar pagina 106

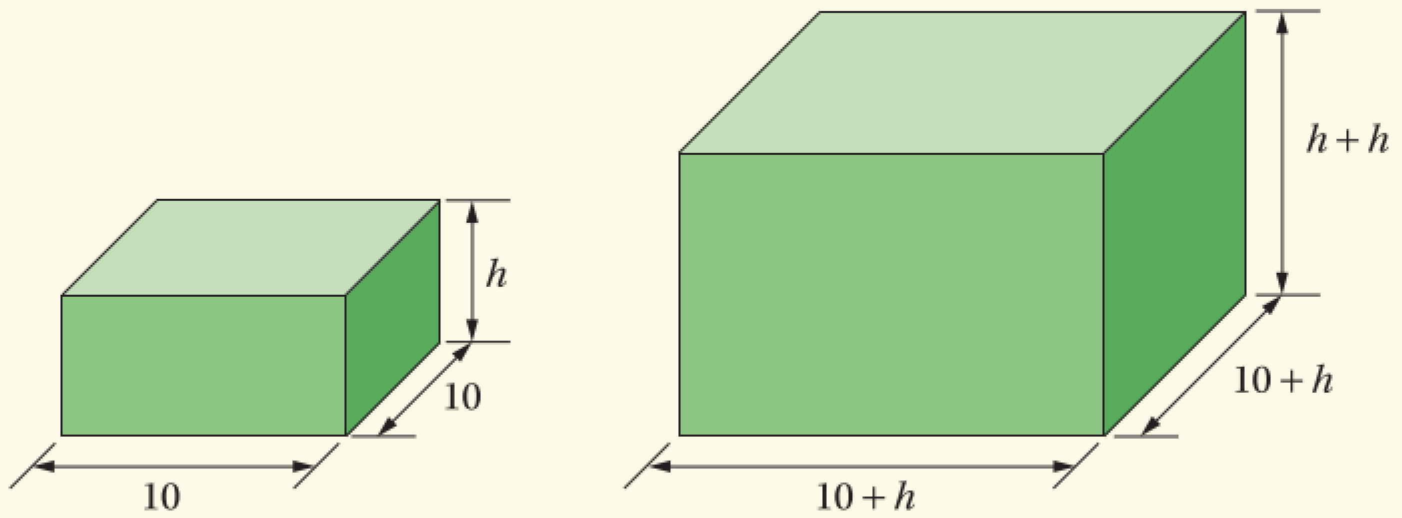
18 Gegeven is de vergelijking $18x^3 - 15x^2 - x + 2 = 0$.

1 Waarom kunnen we deze vergelijking niet oplossen met deling door $x - a$ waarbij a een geheel getal is?

2 Bereken met ICT de oplossingen.

terug naar pagina 106

19 De lengte en de breedte van een balk is 10 cm. Als we de drie afmetingen van de balk vermeerderen met zijn hoogte h, dan wordt het volume 4,5-maal groter.



1 Wat is het volume V_1 van de kleine balk in functie van de hoogte h?

2 Wat is het volume V_2 van de grote balk in functie van de hoogte h?

3 Stel met het verband tussen de twee volumen een vergelijking in h op.

4 Bereken de oorspronkelijke hoogte h van de balk.

terug naar pagina 107

20 Voor welke waarden van p heeft de functie $f(x) = x^3 + 4px$ drie nulwaarden?

(A) $p < -1$ (B) $p < 0$ (C) $p < 1$

(D) $p \leqslant -1$ (E) $p \leqslant 0$ (F) $p \leqslant 1$

terug naar pagina 107

21 Voor welke waarde van p heeft de functie $f(x) = x^3 + px^2 + 9x$ slechts één nulwaarde?

terug naar pagina 107

22 De grafiek van de functie $f(x) = -0{,}25x^4 + 2x^2 - 4$ benadert de vorm van een kabel die opgehangen is tussen drie katrollen.

1 Teken met ICT de grafiek.

2 Wat is de afstand tussen de twee bovenste katrollen als de eenheid op de assen 10 cm is?

terug naar pagina 107

Uitdagingen van pagina 141 tot 143

1 Stel het verloopschema op.

1 $f(x) = 4x\,(10 - x)(6 - x)$

2 $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 35$

3 $f(x) = 25x^4 - 800\,000x + 12\,345$

4 $f(x) = 100x^2 - 10x^3$

terug naar pagina 141

2 Je hebt een goed geheugen nodig om een vreemde taal te leren. Een experiment op studenten die een cursus Japans volgen, leert ons dat woorden uit het hoofd leren sterk afhankelijk is van de studietijd. De doorsnee-student voldoet aan de formule:

$w(t) = -\frac{1}{300}t^2 + \frac{1}{5}t$ w : aantal woorden per minuut t : studietijd in minuten

1 Wanneer is het verzadigingsmoment voor deze doorsnee-student bereikt?

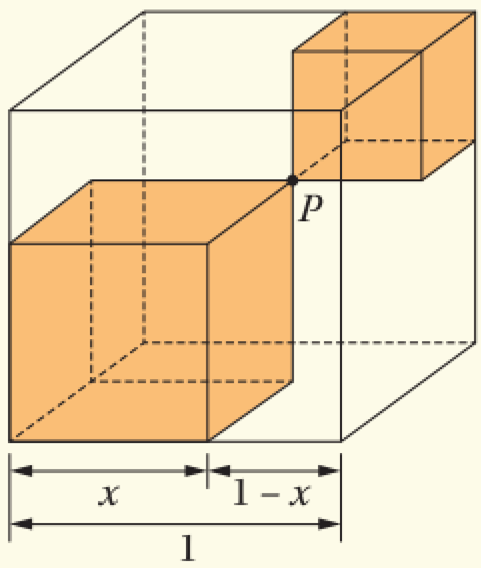
2 Stel het stijgen en dalen van w schematisch voor.

3 Wanneer memoriseert hij de meeste woorden per minuut?

4 Hoeveel woorden zijn dat?

terug naar pagina 141

3 Bepaal de plaats van het punt P zodat de som van de volumes van de ingekleurde kubussen minimaal is.



terug naar pagina 141

4 Stel met de algebraïsche methode de tekentabel op.

1 $f(x) = x(x + 2)^2$

2 $f(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)(3x - 4)(x - 2)^3$

3 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 11x - 6$

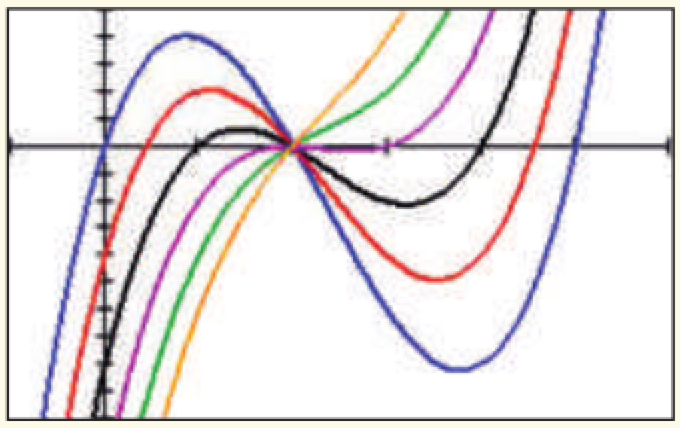
4 $f(x) = x^4 - 12x^2 + 35$

5 $f(x) = x^3 - 8$

6 $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

terug naar pagina 141

5 Op de schermafdruk zien we enkele grafieken van de functie $f(x) = (x - 2)(x^2 - 5x + p)$ voor verschillende waarden van de variabele p. Voor welke waarden van p heeft de functie slechts één tekenverandering in het tekenverloop?



terug naar pagina 142

6 Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?
Los op met ICT en stel de oplossing voor op een getallenas.

1 $f(x) = -x^2 + 11$ en $g(x) = 2$

2 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ en $g(x) = x + 3$

3 $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^3 + 4$

4 $f(x) = 100x^2 - 10x^3$ en $g(x) = 1000$

terug naar pagina 142

7 Los de ongelijkheid op met ICT. Bedenk dat beide leden van de ongelijkheid een functie bepalen (zie ook uitdaging 6). Stel de oplossing voor met intervallen.

1 $3x^4 \geqslant 2x^2 + 1$

2 $6x^2 - 32 < x^3$

3 $4x^2 + 20x > x^4 + 5x^3$

4 $x^4 - 1 \leqslant 3x^3 - 3x$

terug naar pagina 142

8 Een Belgisch bedrijf dat gespecialiseerd is in de productie van ledverlichting, ontdekt na zorgvuldig onderzoek dat er een merkwaardig verband bestaat tussen de verkoopprijs p van een bepaald type lamp en de winst w die de firma jaarlijks maakt.

$w(p) = -0{,}0007p^4 + 0{,}043p^3 - 0{,}8047p^2 + 5{,}526p - 15$

w : winst in miljoen euro
p : prijs van een ledlamp in euro

1 Wat is de jaarlijkse winst als de prijs van de ledlamp 25 euro bedraagt?

2 Voor welke prijs is de winst maximaal?

3 Hoeveel bedraagt de maximale winst?

4 Het bedrijf stelt dat de jaarlijkse winst minimaal 10 miljoen euro moet bedragen. Schrijf met een ongelijkheid alle mogelijke prijzen van een ledlamp.

5 Hoe groot is de winst of het verlies als het bedrijf, bij wijze van reclamestunt, twee lampen voor de prijs van één zou verkopen?

terug naar pagina 142

9 Nadat er een ringweg verder doorgetrokken was, kwamen er heel wat klachten over geluidshinder van de omwonenden. De statistische dienst van het Vlaams departement van Openbare Werken voerde daarom metingen uit naar de verkeersdrukte. Uit de metingen blijkt dat het debiet van het verkeer over een viaduct op deze weg te omschrijven is met de formule $w = -0{,}02t^3 + 0{,}32t^2 + 3{,}84t + 5$. Hierin stelt w het aantal wagens per minuut voor en t de uuraanduiding.

1 Wat is de verkeersdrukte om 24 uur?

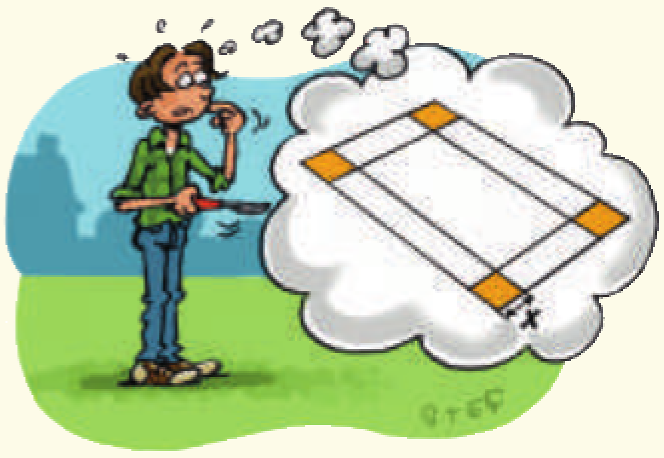
2 Wanneer doet zich een verkeerspiek voor?

Hoeveel wagens per minuut tellen we dan?

3 Wanneer heeft het viaduct een debiet van meer dan 50 wagens per minuut?

terug naar pagina 143

10 Cas wil een plantenbak plooien uit een zinken plaat van 70 × 100 cm. Daarvoor knipt ze op de vier hoeken van de plaat een vierkant met zijde x weg, plooit de vrijgekomen zijwanden naar boven en soldeert de naden dicht.







1 Stel een formule op voor de inhoud van de plantenbak in functie van de zijde x.

2 Voor welke x kan de bak minimum 40 liter potaarde bevatten? Welke ongelijkheid moeten we oplossen zodat x uitgedrukt is in cm? Los op met ICT.

3 Voor welke waarde van x heeft de plantenbak de grootste inhoud?

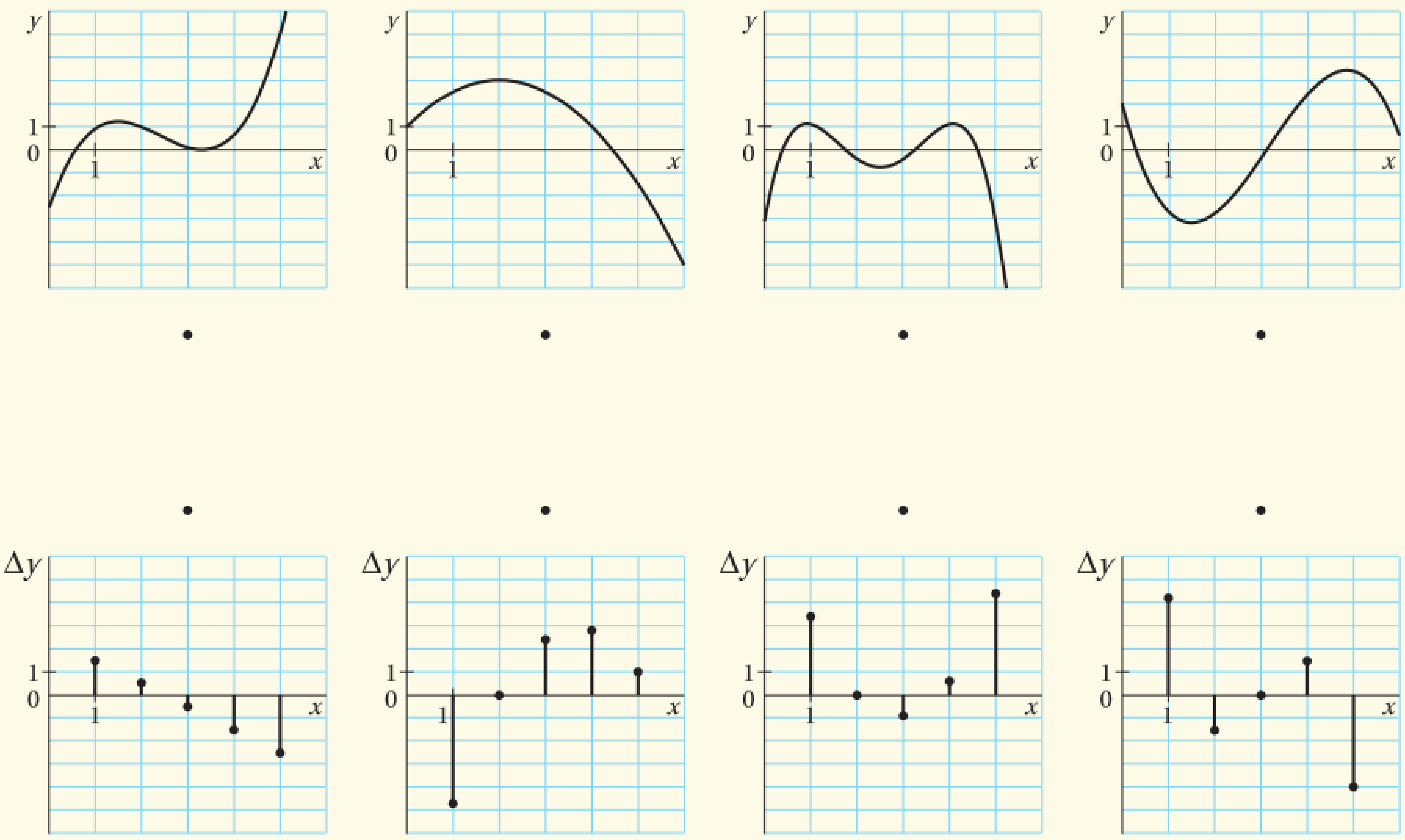
4 Wat zijn de afmetingen van de bloembak met de grootste inhoud?

5 Hoeveel liter teelaarde kan deze bloembak bevatten?

terug naar pagina 143

Uitdagingen van pagina 184 tot 189

1 Verbind elke grafiek met het bijbehorende toenamediagram.

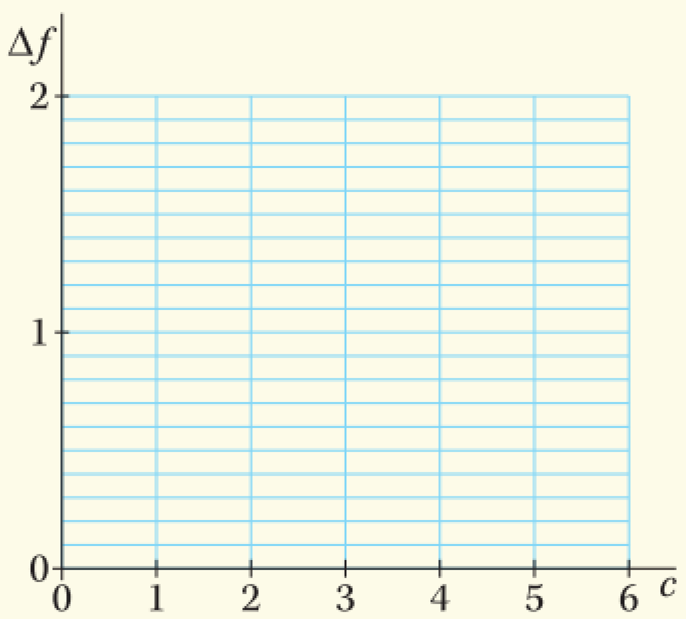


terug naar pagina 184

2 Teken bij de formule een toenamediagram met stapgrootte 1 over het interval [0, 6].

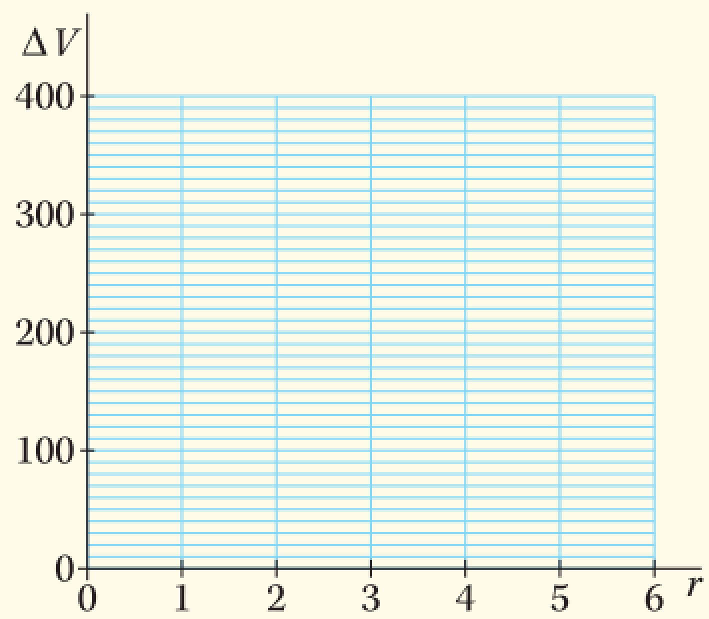
1 $f = 1{,}8c + 32$

f: temperatuur in graden Fahrenheit
c: temperatuur in graden Celcius



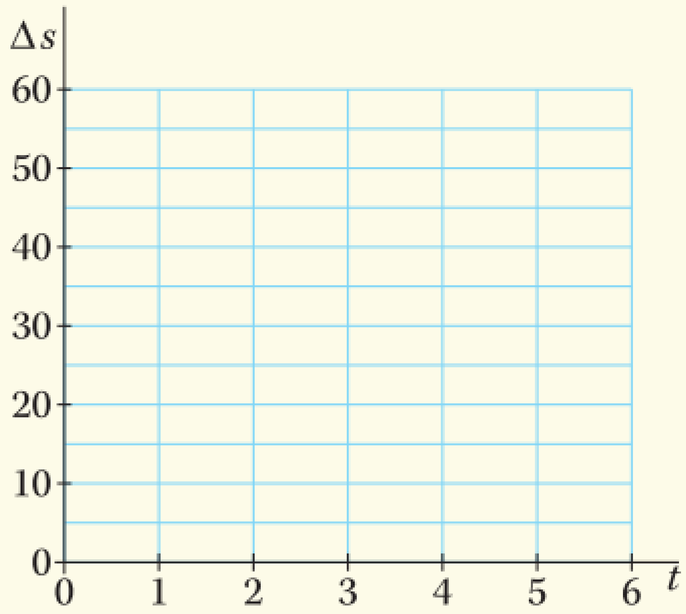
2 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

V: volume bol in cm^3
r: straal bol in cm



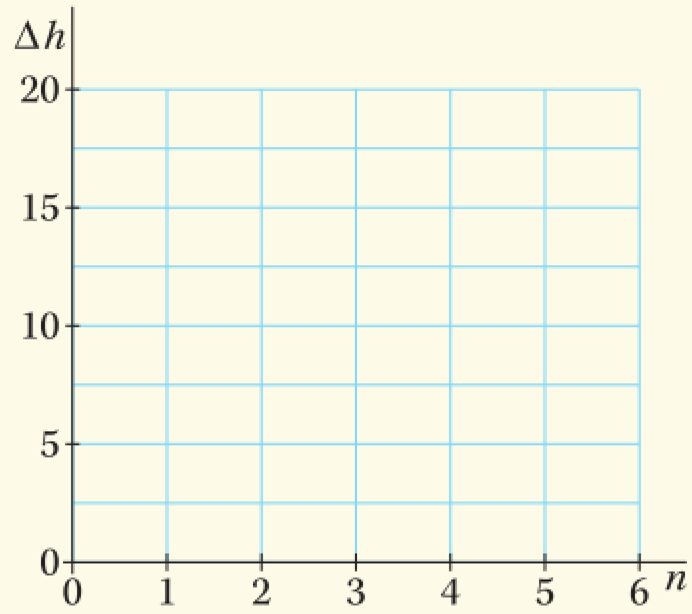
3 $s = 5t^2$

s: afgelegde weg in meter
t: tijd in seconden



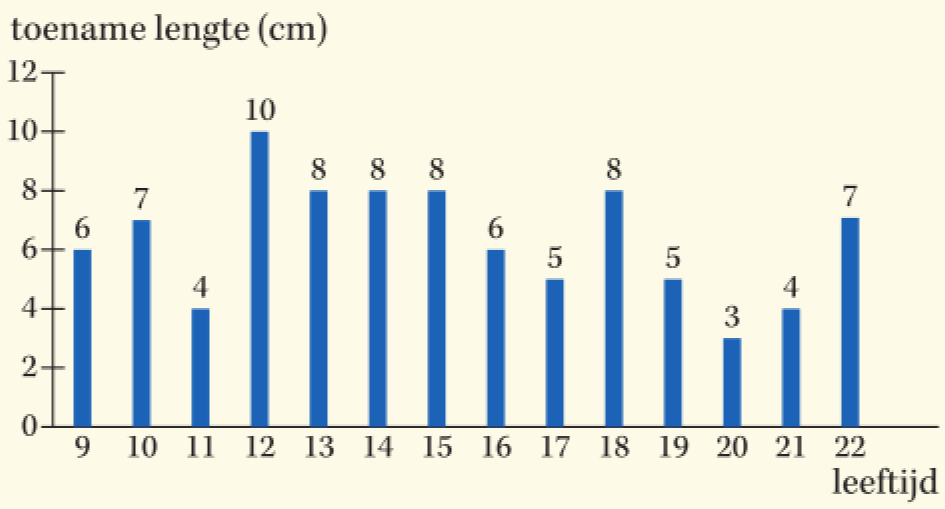
4 $h = 17{,}5n$

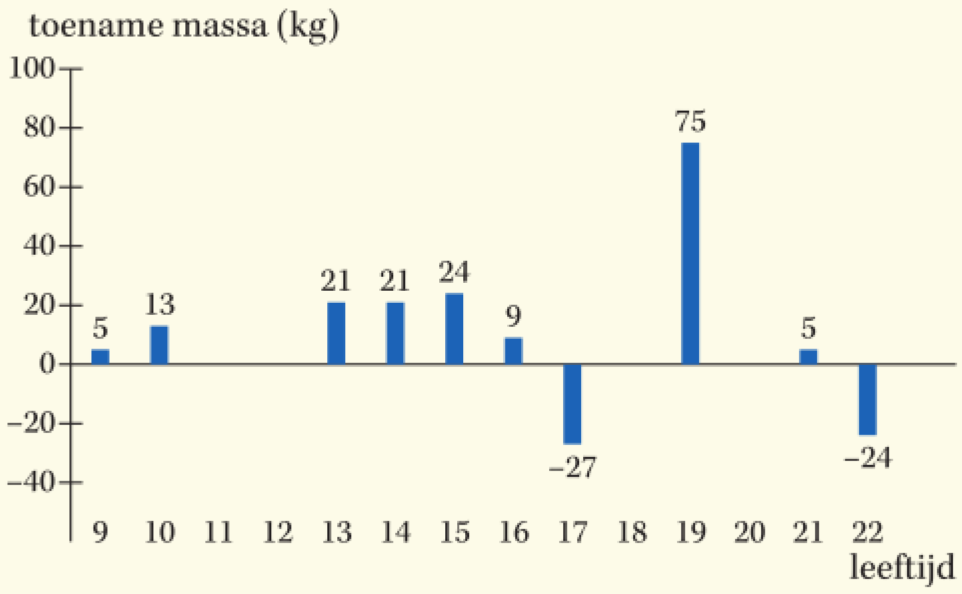
h: hoogte van een trede in cm
n: aantal treden van een trap

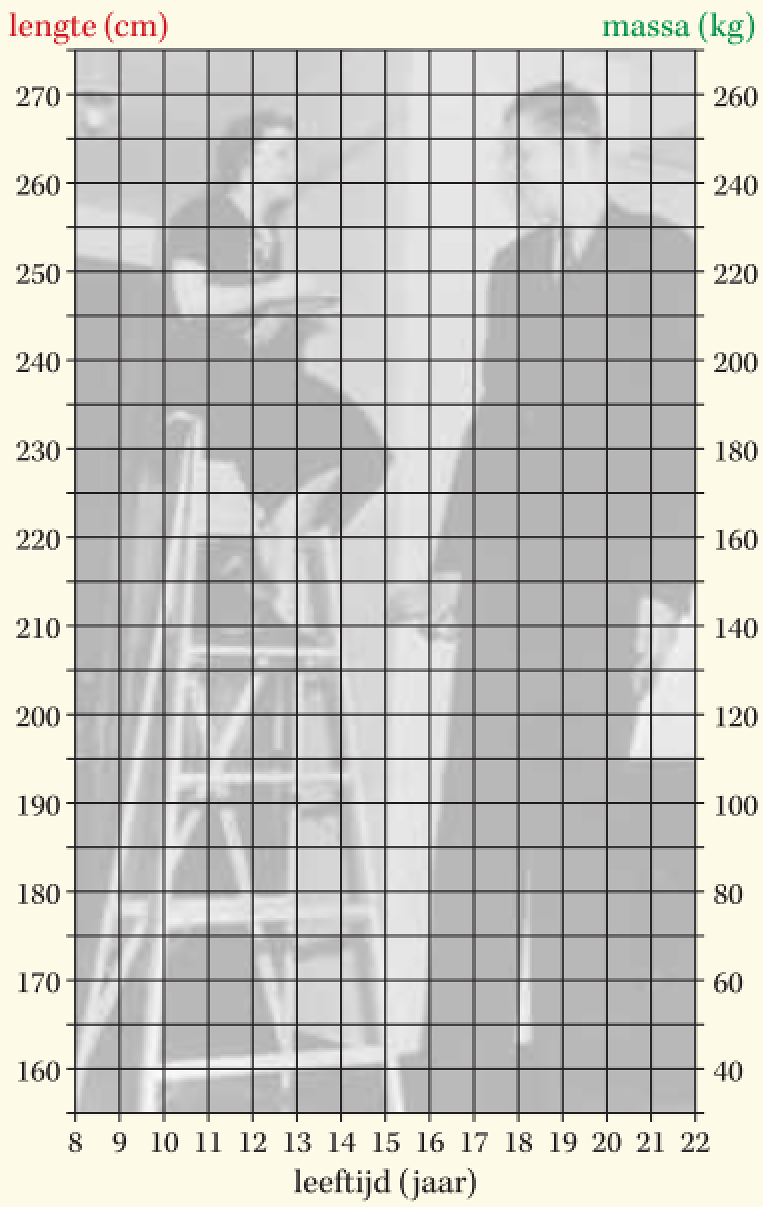


terug naar pagina 184

3 De grootste man ter wereld was Robert Pershing Wadlow, geboren in 1918. Op achtjarige leeftijd was hij 1,83 m groot en woog hij 77 kg. De toename van zijn lengte en massa lezen we af in de toenamediagrammen.







1 Teken de bijbehorende grafieken waarop we de lengte en de massa van Robert kunnen aflezen.

2 Hoe groot was Robert op zijn 22e verjaardag? Hoeveel woog hij toen?

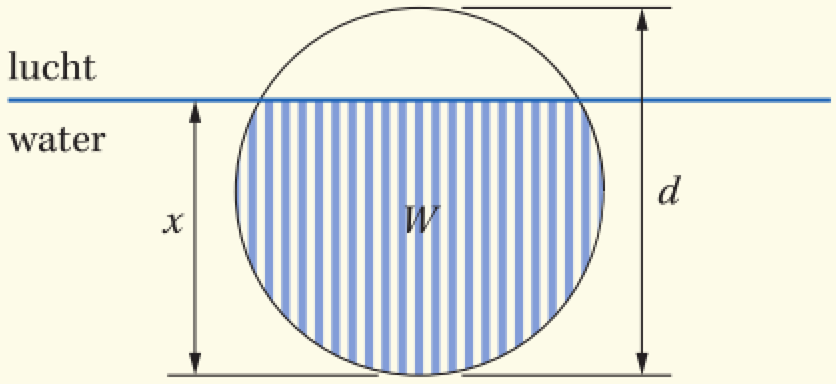
3 In welk jaar groeide hij het snelst?

4 Robert kreeg voor hij twintig werd een zware griep en een infectie aan zijn voet. Hierdoor viel hij sterk af. In welk jaar was dit?

5 Hoeveel woog hij toen en wat was zijn lichaamslengte?

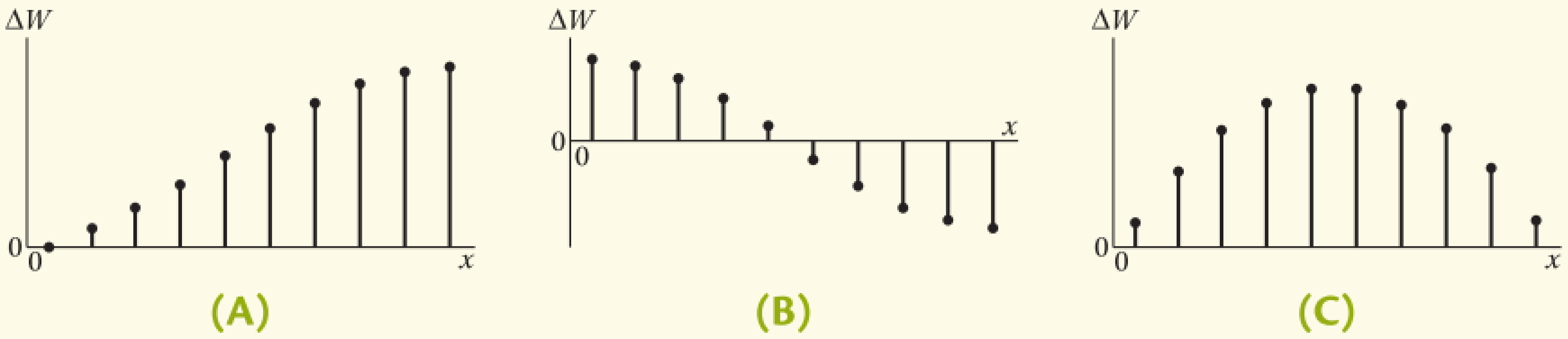
terug naar pagina 185

4 Het is niet zo makkelijk om een bal onder water te duwen en zeker niet om hem daar te houden. Laten we de bal onder water los, dan schiet hij omhoog en springt soms een heel eind boven het wateroppervlak. We duwen langzaam een bal, met diameter d, een afstand x onder het wateroppervlak.





Welk toenamediagram behoort bij de toename van het volume W van de bal, dat onder water zit?



terug naar pagina 186

5 Gegeven zijn de functies $f(x) = 15x + 5$ en $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Bepaal met ICT een interval met stapgrootte $\Delta x = 2$ waarover de differentiequotiënten van de twee functies gelijk zijn.

terug naar pagina 186

6 Tot voor het jaar 1962 waren binnenschippers, omwille van de talrijke sluizen, ongeveer twee dagen onderweg om via het kanaal Brussel-Charleroi hun bestemming te bereiken. Om dit traject met een hoogteverschil van 68 m te overbruggen, bouwde men te Ronquières een hellend vlak waarop twee reusachtige waterbakken over rails omhoog en omlaag rijden. Sinds 1968 kunnen schepen met een laadvermogen tot 1350 ton in de tijd van drie kwartier de helling nemen in één van deze waterbakken. Het hellend vlak van sluisdeur tot sluisdeur meet 1432 m.



1 Maak een schets van de profieldoorsnede van het hellend vlak.

2 Bereken de horizontale afstand die door het hellend vlak overbrugd wordt.

3 Bepaal de helling en de hellingshoek van het hellend vlak van Ronquières.

terug naar pagina 186

7 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25x^2 - 0{,}75x + 1{,}5$.

1 Bereken de gemiddelde helling van de grafiek over de intervallen $[-5, -3]$, $[-3, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$ en $[3, 5]$.

2 Bepaal drie intervallen waarover de gemiddelde helling nul is.

terug naar pagina 187

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 3x$ en $g(x) = -x^2 + 2$.

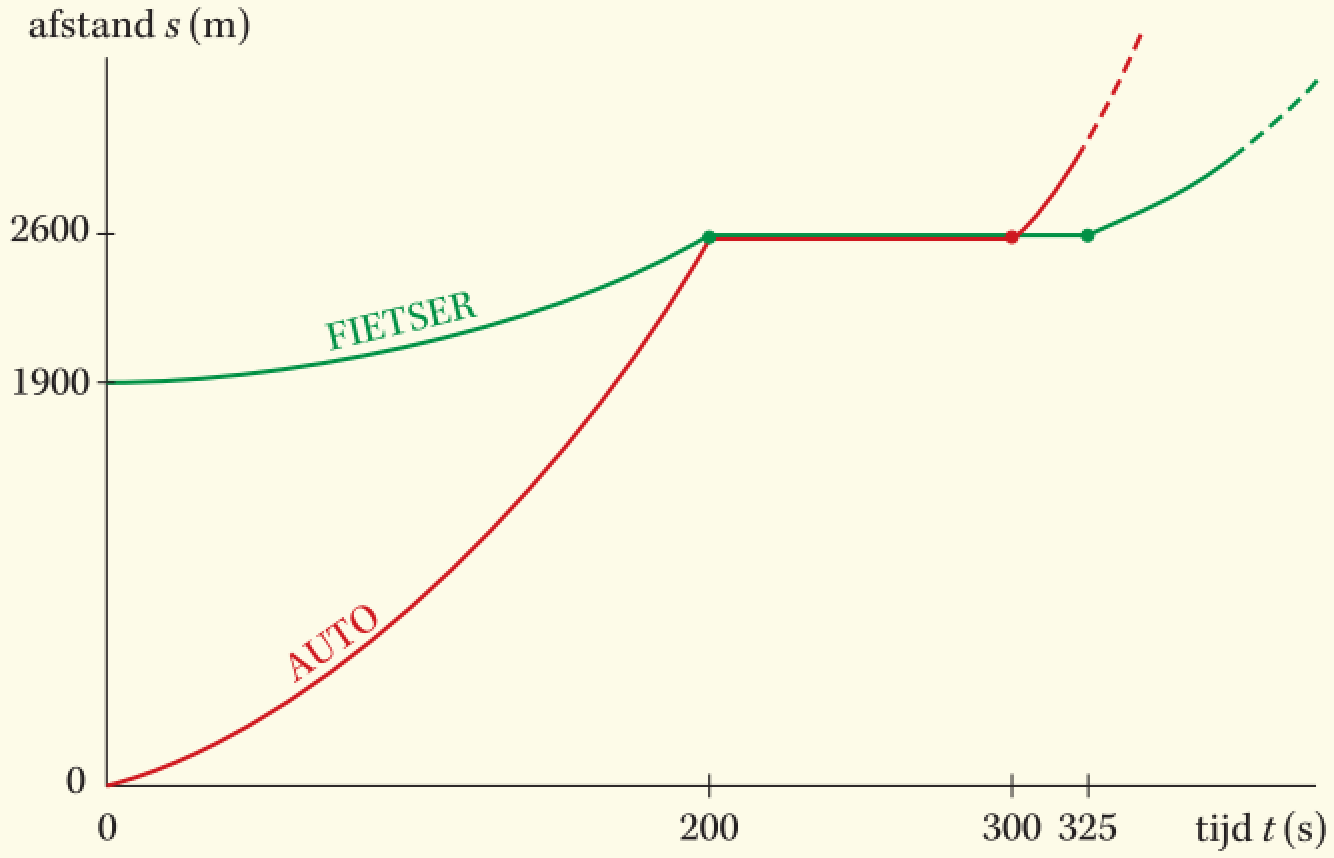
1 Bepaal de helling van de rechte die door de snijpunten A en B van de grafieken van de functies f en g gaat.

2 Bereken de hellingshoek van deze rechte.

3 Bepaal een vergelijking van de rechte AB.

terug naar pagina 187

9 Een fietser en een automobilist rijden langs dezelfde weg. De fietser wordt door de chauffeur aangereden. Het hele gebeuren is op de grafiek vastgelegd.



1 Wanneer wordt de fietser aangereden? Hoe zien we dat op de grafiek?

2 Het ongeval loopt goed af. Waaraan zien we dat?

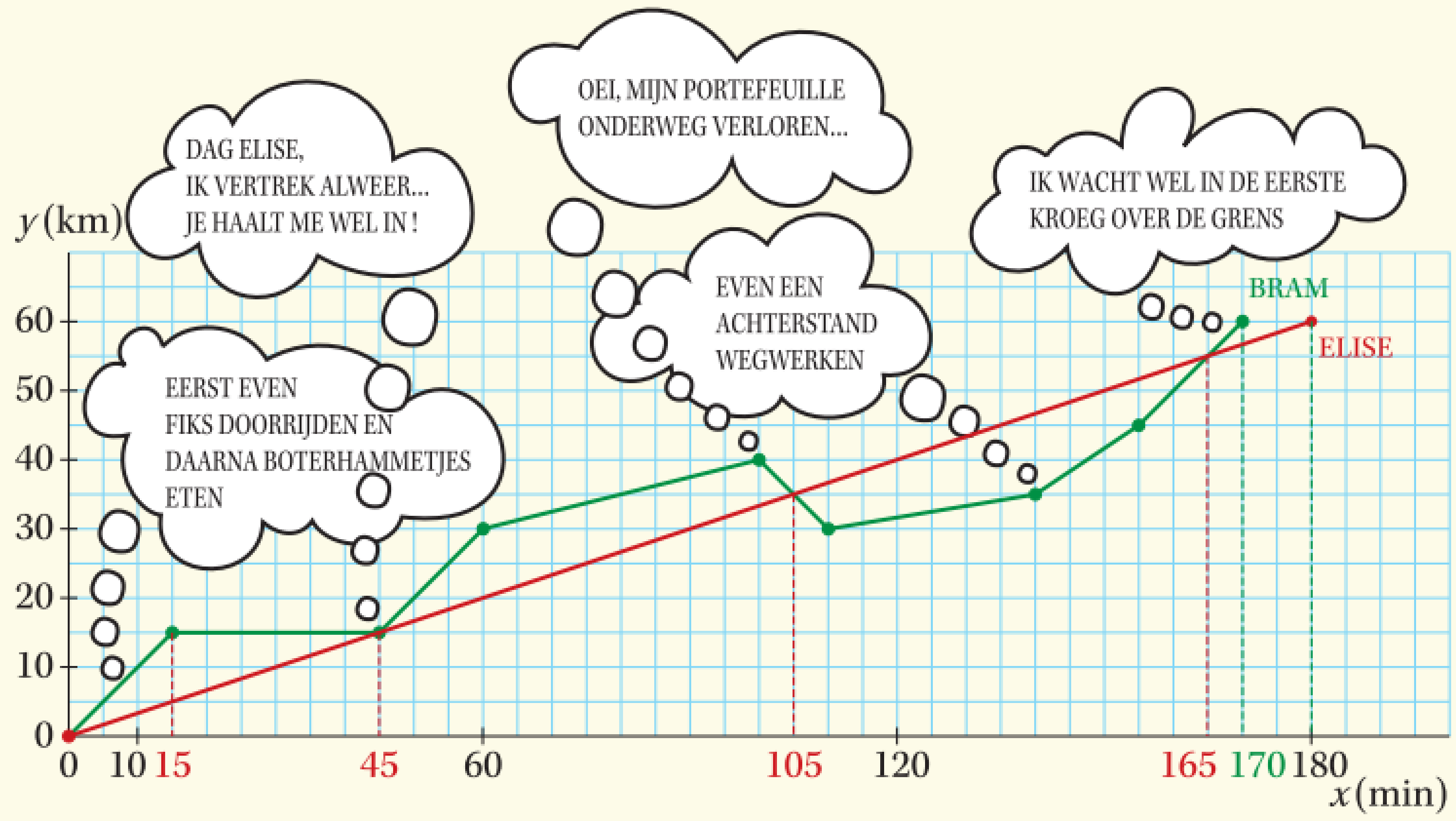
Wie vervolgt eerst zijn weg?

3 Bereken de gemiddelde snelheid in km/h van de fietser en van de automobilist tot op het moment van de aanrijding.

4 Aan welke gemiddelde snelheid moet de fietser over de resterende 3,5 km rijden om de verloren tijd in te halen?

terug naar pagina 187

10 Bram en Elise zijn klasgenoten en fietsen samen 60 km langs de Belgische kust. Elise fietst met een constante snelheid, Bram fietst eerder onregelmatig. Ze vertrekken samen aan het Zwin in Knokke en spreken af dat wie eerst het natuurreservaat de Westhoek in De Panne bereikt, blijft wachten. De grafiek toont hoe Bram en Elise dit traject afleggen.



1 Bereken de snelheid van Elise in kilometer per minuut.

2 Bepaal de helling van de grafiek van Elise.

3 Zoek twee tijdsintervallen van 45 minuten waarover de gemiddelde snelheid van Bram gelijk is aan de snelheid van Elise.

4 Zoek twee tijdsintervallen van 60 minuten waarover de gemiddelde snelheid van Bram gelijk is aan de snelheid van Elise.

5 Hoe vaak en op welke tijdstippen ontmoeten Bram en Elise elkaar? Beschrijf het rijgedrag van Bram bij elke ontmoeting.

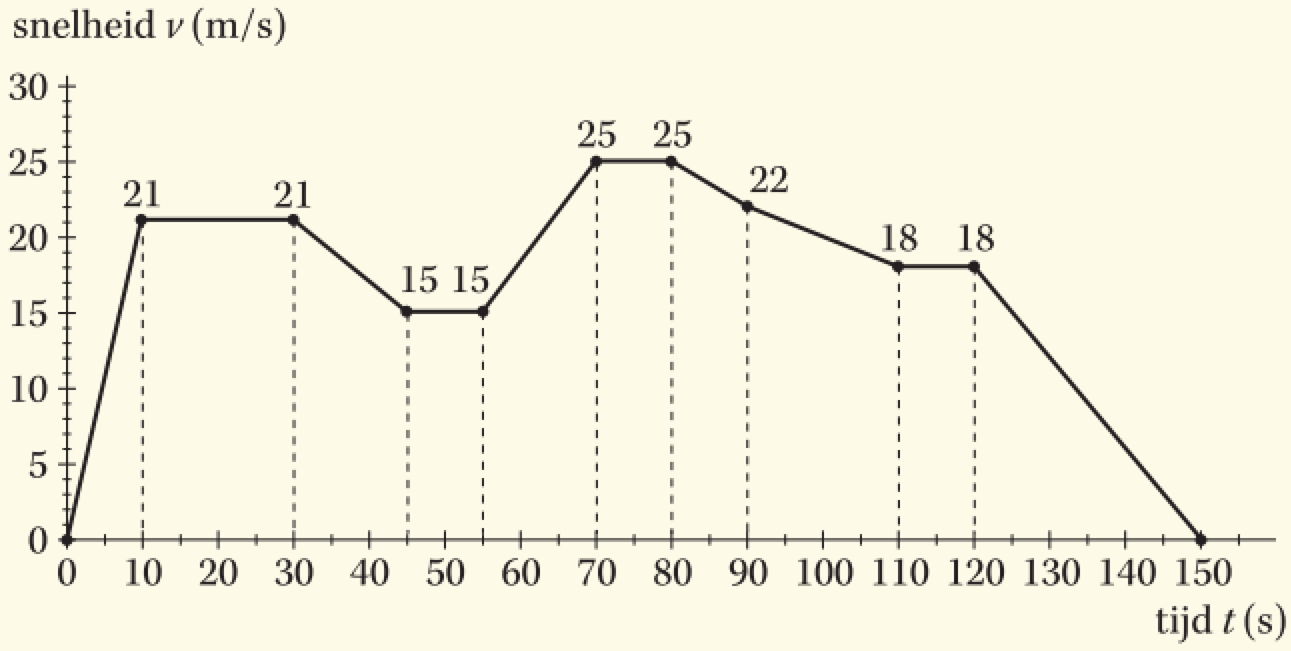
6 Hoeveel minuten heeft Bram minder nodig dan Elise om dit traject af te leggen?

7 Bereken de gemiddelde snelheid van Bram in kilometer per minuut over de trip van 60 km.

8 Bereken het verschil in graden, minuten en seconden tussen de gemiddelde hellingshoek van de grafiek van Bram en de hellingshoek van de grafiek van Elise.

terug naar pagina 188

11 Tijdens een afdaling wordt de snelheid van een skiër bepaald op verschillende tijdstippen. De meetresultaten zijn opgetekend in de tijd-snelheidgrafiek.



1 Bereken de maximale snelheid van de skiër in km/h.

2 In welke van de aangeduide tijdsintervallen versnelt de skiër?

Hoe zien we dat op de grafiek?

3 In welk tijdsinterval is de gemiddelde versnelling van de skiër het grootst?

Bepaal deze versnelling door de gemiddelde verandering van de snelheid te berekenen over dat interval.

4 In welke tijdsintervallen versnelt de skiër niet? Hoe zien we dat op de grafiek?

5 In welk tijdsinterval vertraagt de skiër het minst? Hoe zien we dat op de grafiek?

Bereken de bijbehorende versnelling. Welke betekenis kunnen we aan het minteken in het rekenresultaat toekennen?

terug naar pagina 188

Uitdagingen van pagina 202 en 203

1 Bereken de helling van de parabool met voorschrift $f(x) = x^2 + 5x - 14$ in het snijpunt met de y-as en in de snijpunten met de x-as.

terug naar pagina 202

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = -4x^2 - 8x + 9$ en $g(x) = 4$. Bereken de hoek waaronder de grafieken van deze twee functies elkaar snijden.

terug naar pagina 202

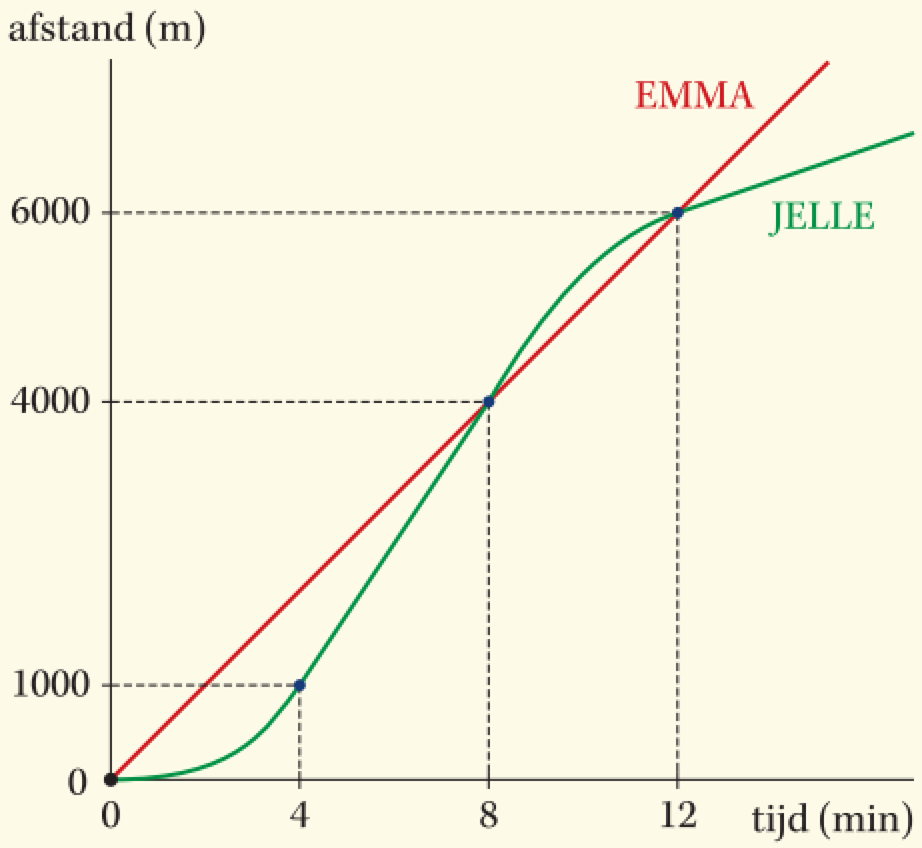
3 Teken de grafiek van de functie $f(x) = |x - 3|$ in een kijkvenster met gelijke schaalverdelingen op de assen.

1 Hoeveel hellingen heeft de grafiek in het punt (3, 0)?

2 Bepaal deze hellingen met behulp van de grafiek.

terug naar pagina 202

4 Als voorbereiding op een tiendaagse fietstocht maken Jelle en Emma een oefenritje. De afstand die ze afleggen in functie van de tijd kunnen we aflezen op de grafiek.



1 Beschrijf aan de hand van de grafiek de fietswijze van Emma en Jelle.

2 Aan welke snelheid in km/h fietst Emma?

3 Bereken de gemiddelde snelheid in km/h van Jelle tijdens de eerste vier minuten van de rit.

4 Wat is de snelheid in km/h van Jelle op het ogenblik dat hij Emma voorbij steekt?

5 Wanneer rijden Jelle en Emma aan dezelfde snelheid? Vink de tijdstippen aan.

na 3 minuten	na 4 minuten	na 10 minuten	na 12 minuten
☐	☐	☐	☐

terug naar pagina 202

5 Bij het overspringen van een verkeerslicht van groen naar oranje moet een auto vertragen en stoppen. De snelheid van de auto tijdens deze beweging kunnen we berekenen met $s(t) = -\frac{68}{45}t^2 + \frac{68}{3}t$ waarin s de afstand in meter en t de tijd in seconden voorstelt.

1 Na hoeveel meter komt de auto tot stilstand?

2 Wat is het werkdomein van de functie s?

3 Wat is de snelheid van de wagen op het ogenblik dat het verkeerslicht overspringt?

terug naar pagina 203

Exploratie van pagina 204

Het uittesten van een nieuw valscherm

Recreatieve parachutespringers springen vaak uit de laadruimte van een sportvliegtuig vanaf een hoogte van meer dan 2500 meter. Vanaf deze hoogte kunnen ze minstens 1000 meter van een vrije val genieten vooraleer hun parachute te openen. Gedurende de vrije val blijft de snelheid van de valschermspringers niet de hele tijd toenemen. De wrijving met de lucht zorgt ervoor dat de maximale valsnelheid spoedig na de sprong bereikt wordt. De snelheid bij de landing hangt af van de kwaliteit van de parachute en van de vaardigheid van de springer. Vooral valschermen voor duosprongen moeten aan de normen voor een 'zachte landing' voldoen. De landingssnelheid bij een routinesprong mag hier slechts 5 m/s bedragen. Bij militaire sprongen landt men aan 6 m/s.

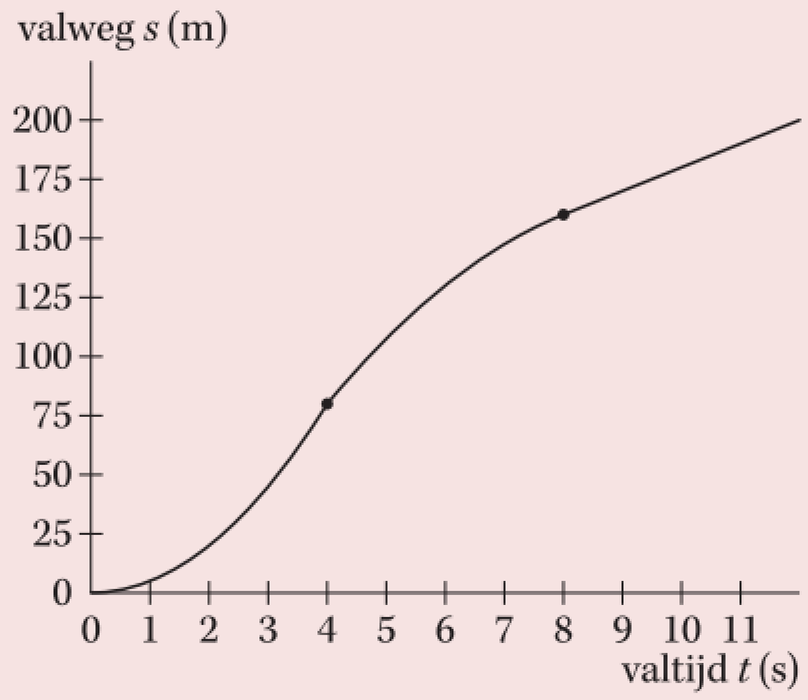
Een nieuw valscherm moet aan een testsprong onderworpen worden alvorens het op de markt kan gebracht worden. De testspringer springt vanaf een hoogte van 1880 meter en opent vrijwel onmiddellijk zijn parachute. Zijn vlucht wordt beschreven met de formules

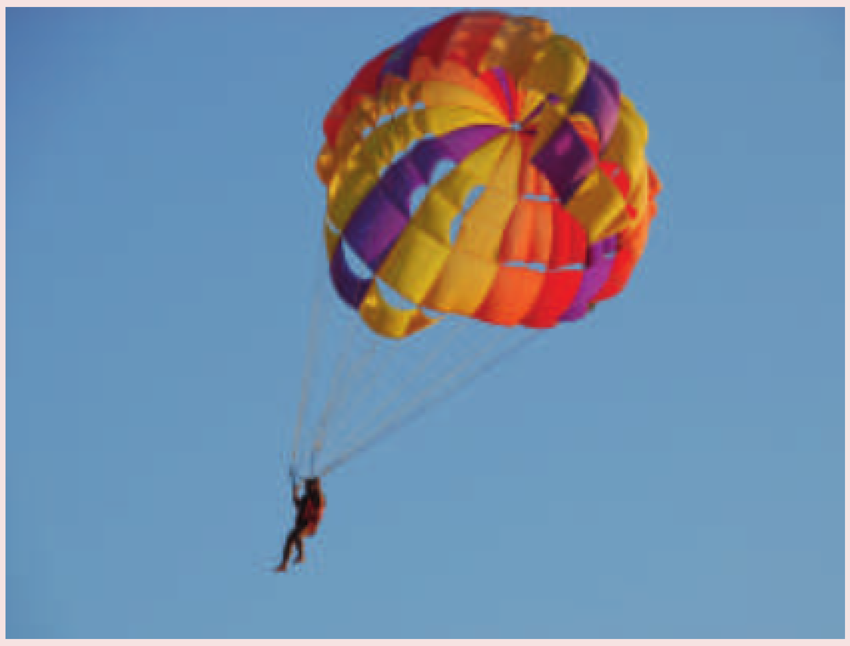
$s = 5t^2$ met $t \in [0, 4]$

$s = -2{,}5t^2 + 50t - 80$ met $t \in]4, 8]$

$s = 10t + 80$ met $t \in]8, ?]$

waarin s de valweg in meter voorstelt en t de valtijd in seconden.





1 Na hoeveel seconden bereikt de testspringer de grond?

2 Wat is het werkdomein van het derde grafiekdeel?

3 Stel een drievoudig voorschrift op dat de valweg beschrijft in functie van de valtijd.

4 Bereken de gemiddelde snelheid van de valschermspringer over de hele val. Druk het antwoord uit in m/s en in km/h.

5 Bereken de ogenblikkelijke snelheid van de valschermspringer in m/s en in km/h

a twee seconden na het verlaten van het vliegtuig.

b vijf seconden na het verlaten van het vliegtuig.

Wanneer we de ogenblikkelijke valsnelheid van de parachutist willen kennen in de punten $\big(4, s(4)\big)$ en $\big(8, s(8)\big)$, dan moeten we de plaatselijke helling telkens op twee manieren berekenen: eerst met $\Delta t = -0{,}001$ en daarna met $\Delta t = 0{,}001$.

6 Bereken de ogenblikkelijke valsnelheid van de valschermspringer in m/s en in km/h

a vier seconden na het verlaten van het vliegtuig.

b acht seconden na het verlaten van het vliegtuig.

7 Is de valsnelheid juist voor en juist na vier seconden gelijk?

8 Hoe verklaren we dit?

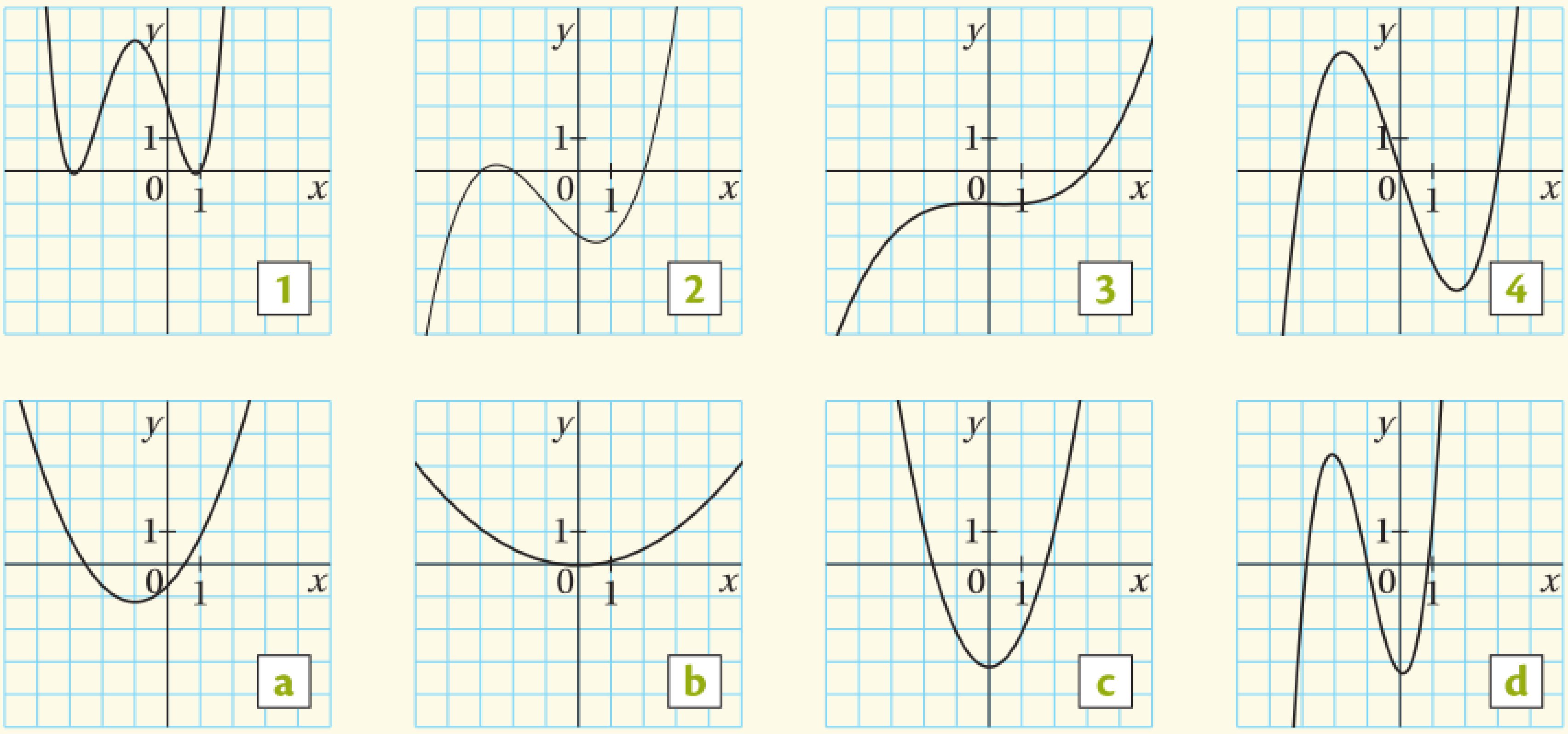
9 Met welke snelheid bereikt de valschermspringer de grond?

10 Mag de parachute op de markt gebracht worden?

terug naar pagina 204

Uitdagingen van pagina 263 tot 268

1 Gegeven zijn de volgende grafieken en de bijbehorende hellingsgrafieken.
Welke grafieken horen bij elkaar?



terug naar pagina 263

2 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 + ax + b$ en $g(x) = -x^2 + bx$. Bepaal a en b zodat $f(3) = g(3)$ en $f'(3) = g'(3)$.

terug naar pagina 263

3 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + ax + b$. Bepaal a en b zodat de grafiek van f en de grafiek van f' elkaar snijden in het punt $P(2, -1)$.

terug naar pagina 263

4 Bepaal de hoek gevormd door de raaklijnen in de punten $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ en $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$ van de grafiek van $f(x) = x^3 - x^2$. Rond af op 1°.

terug naar pagina 263

5 Bepaal de waarde van a in de vergelijking $y = x + a$ van de raaklijn t aan de grafiek van de functie $f(x) = x^2 + 32x + 4$.

terug naar pagina 263

6 Voor welke waarden van a raakt de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + a$ de x-as?

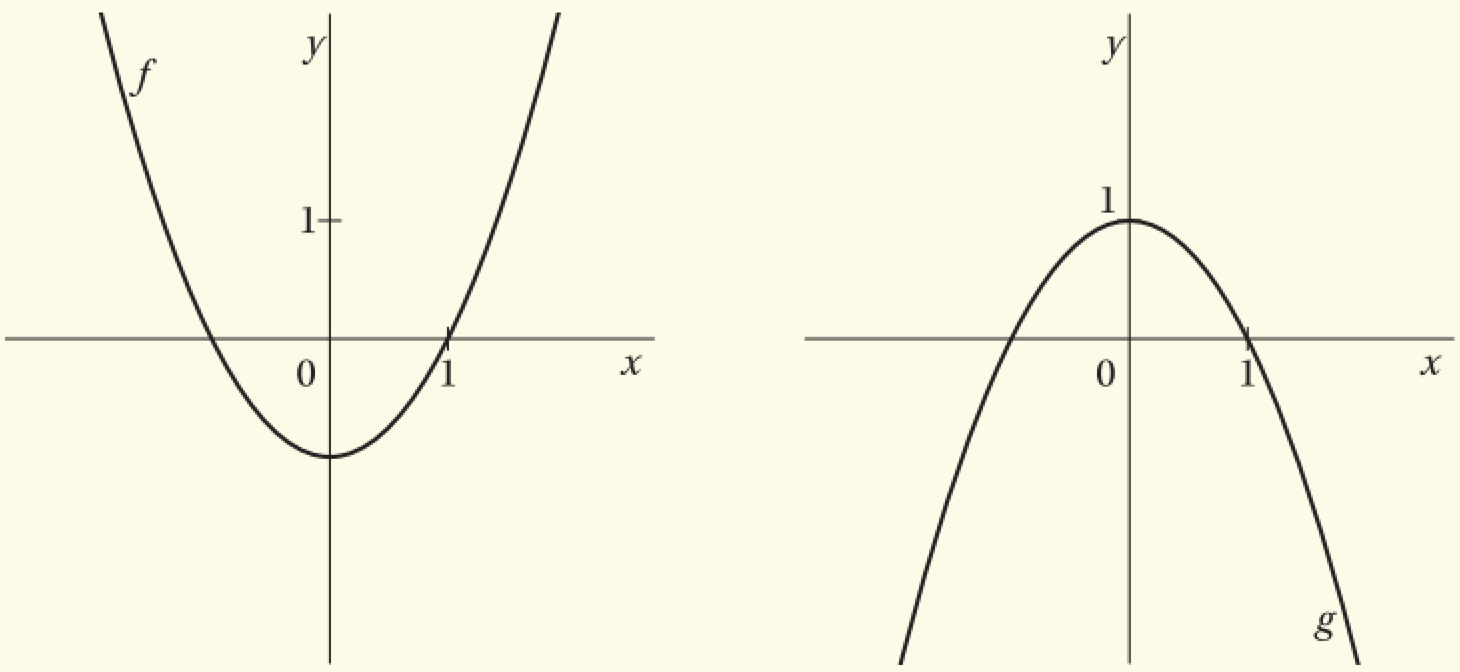
terug naar pagina 263

7 In welke punten van de grafiek van $f(x) = x^3 - x + 1$ is de raaklijn t

1. evenwijdig met de x-as?
2. evenwijdig met de tweede deellijn d van het assenstelsel?
3. evenwijdig met de rechte $a \leftrightarrow y = 2x - 3$?
4. evenwijdig met de rechte $b \leftrightarrow y = -4x + 3$?

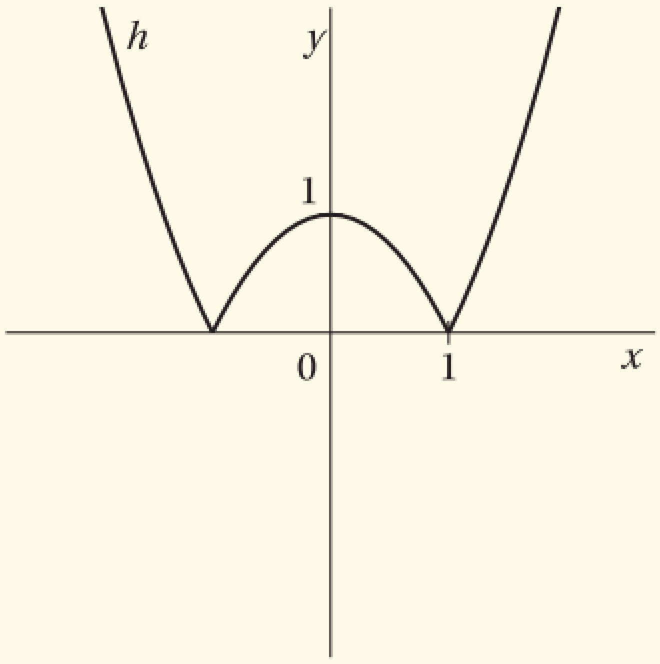
terug naar pagina 263

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 1$ en $g(x) = 1 - x^2$.



1 Bereken voor beide grafieken een vergelijking van de raaklijn in het punt $(1, 0)$.
Teken de raaklijnen.

2 Teken met behulp van deze vergelijkingen de raaklijnen in het punt $(1, 0)$ aan de grafiek van $h(x) = |x^2 - 1|$.



3 Heeft de grafiek van h nog zo een merkwaardig punt waarin de raaklijn aan de linkerkant niet samenvalt met de raaklijn aan de rechterkant? Zo ja, geef de coördinaten van dit punt.

terug naar pagina 264

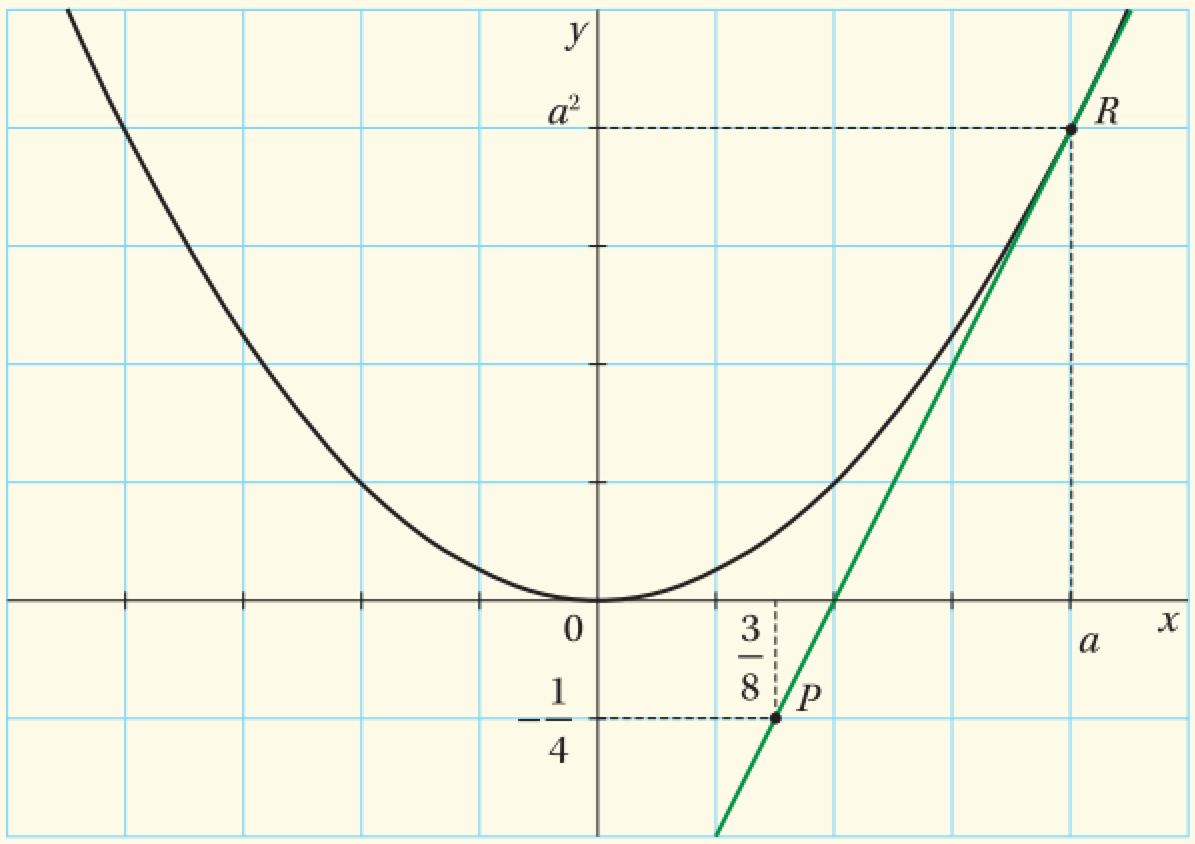
9 De grafiek van de veeltermfunctie f heeft een raaklijn t evenwijdig met de rechte $a \leftrightarrow y = -3x + 2$.

Omcirkel de mogelijke functievoorschriften.

(A) $f(x) = 2$ **(B)** $f(x) = x + 2$ **(C)** $f(x) = x^2 + 2$ **(D)** $f(x) = x^3 + 2$ **(E)** $f(x) = x^4 + 2$

terug naar pagina 264

10 Uit het punt $P\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ kunnen twee raaklijnen getrokken worden aan de grafiek van de functie $f(x) = x^2$. Eén van deze raaklijnen heeft als raakpunt $R(a, a^2)$.



1 Stel een formule op voor de rico van de raaklijn PR.

2 Bepaal met de afgeleide functie f' de helling van de raaklijn PR.

3 Bereken alle waarden van a die voldoen aan de vergelijking bekomen door de antwoorden op de vragen 1 en 2 aan elkaar gelijk te stellen.

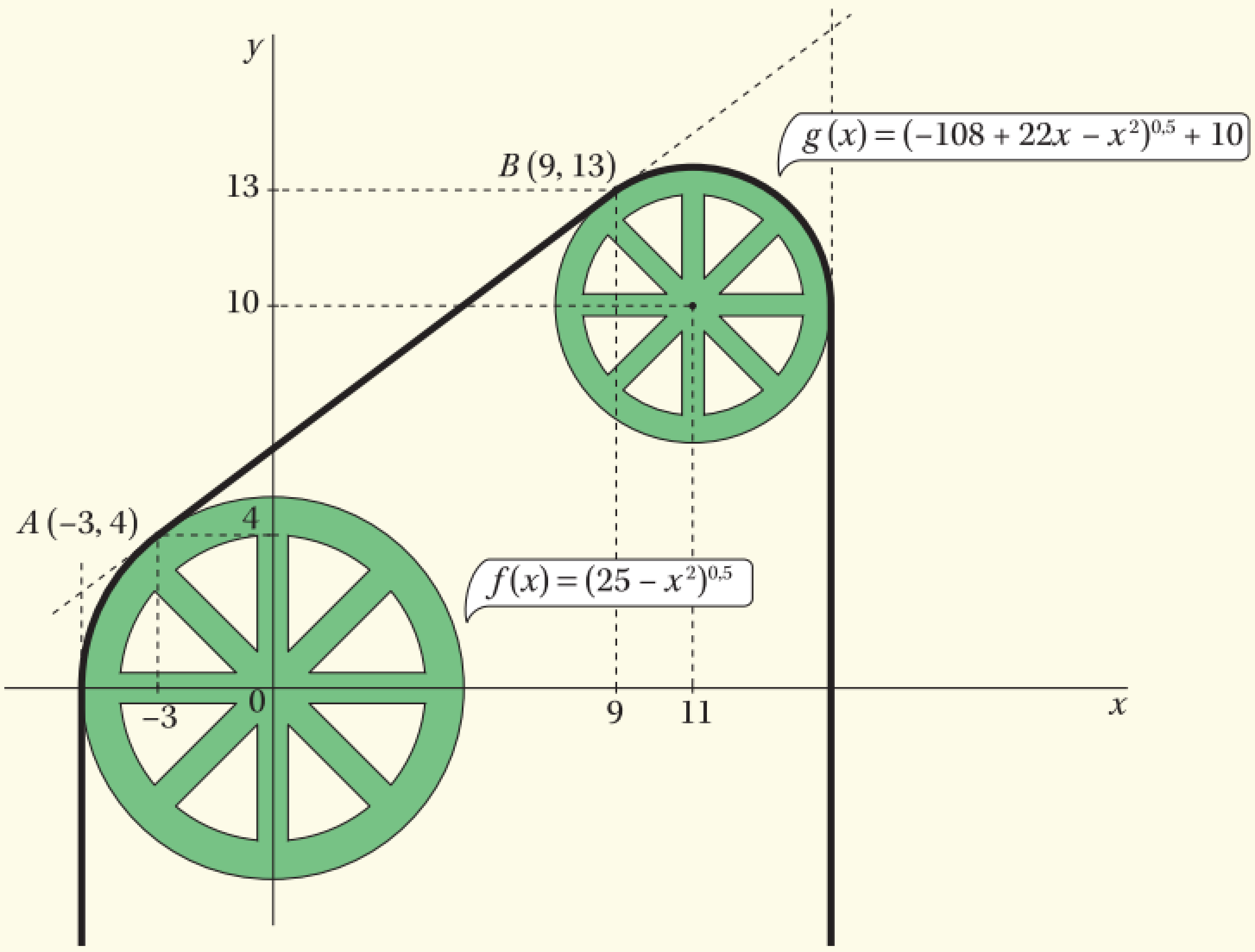
4 Bepaal de richtingscoëfficiënten van de twee raaklijnen t_1 en t_2 uit het punt P aan de grafiek van f.

5 Berekenen de hoek tussen de raaklijnen.

6 Teken de raaklijn t_2.

terug naar pagina 264

11 Op de tekening wordt een mechanisch onderdeel van een ambachtelijke machine afgebeeld. Er is echter iets mis gelopen met dit ontwerp! De punten $A(-3, 4)$ en $B(9, 13)$ zijn de bovenste raakpunten van de aandrijfriem aan twee wielen. Het plan vermeldt de functievoorschriften van de bovenste helften van de twee wielen.



1 Bereken de richtingscoëfficiënt van de aandrijfriem tussen *A* en *B*.

2 Bereken met ICT de helling van de raaklijn in *A* aan de grafiek van *f*.

3 Bereken op dezelfde wijze de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in *B* aan de grafiek van *g*.

4 Welk wiel raakt niet aan de rechte *AB*?

terug naar pagina 265

12 Gegeven is de tekentabel van de functie *f* en van zijn afgeleide functie *f'*.

x		-4		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

x		-2		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	....	4	....	0	....
		....		....	

1 Vul het verloopschema van *f* aan.

2 Teken de grafiek van *f* als de grafiek puntsymmetrisch is ten opzichte van het punt (0, 2).

terug naar pagina 266

13 Gegeven zijn de veeltermfuncties:

1 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ **2** $f(x) = -x^4 + x^3$ **3** $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^4$

a Stel met de algebraïsche methode de tekentabel van *f* op.

b Bereken de afgeleide functie *f*'.

c Stel met de afgeleide functie het verloopschema van *f* op.

d Teken de grafiek van *f*.

terug naar pagina 266

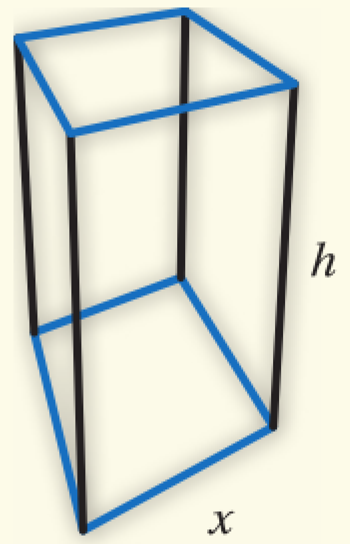
14 In een tropisch zwembad kunnen we vanaf een 12 meter hoge glijbaan in het golfslagbad plonsen. De glijbaan bestaat uit een doorzichtige koker die in één vlak kronkelt volgens de grafiek van de functie:

$$f(x) = \frac{1}{81\,920}x^7 - \frac{21}{12\,800}x^5 + \frac{21}{320}x^3 + 6 \qquad \text{met} \quad \text{dom}\, f = [-8{,}29\,;\, 8{,}29]$$

Bepaal de buigpunten met horizontale raaklijn van de glijbaan. Rond de coördinaten af op 2 decimalen.

terug naar pagina 266

15 Een fabrikant vraagt een ontwerp te maken van een draadmodel van een balk met vierkant grondvlak. De opstaande ribben moeten verstevigd worden zodat voor deze draden een meerprijs van 5 eurocent per meter wordt aangerekend. De basisdraad kost 20 eurocent per meter en de totale kostprijs is 2 euro.
Bepaal de afmetingen van het draadmodel met de grootste insluitruimte.
Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Druk de insluitruimte V uit in functie van de zijde x van het grondvlak.

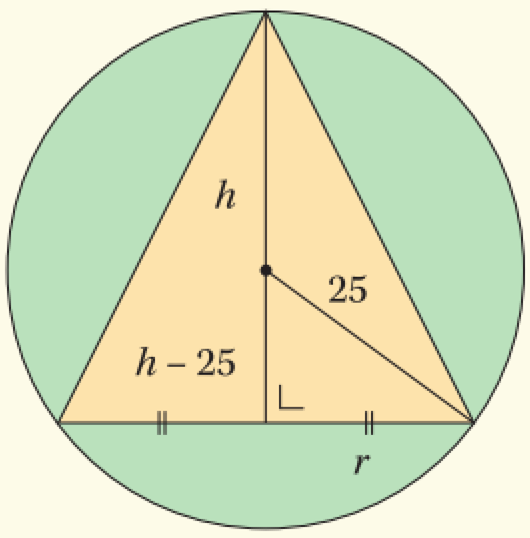
2 Bepaal het werkdomein van V.

3 Voor welke afmetingen is het volume maximaal? Rond af op 1 mm.

4 Hoeveel is de maximale insluitruimte? Rond af op 1 dm^3.

terug naar pagina 267

16 In een discobal met een diameter van 50 cm zit een kegel ingesloten. Om een extra lichteffect te bekomen, moet het volume van de kegel zo groot mogelijk zijn. Wat is de hoogte h en de straal r van die ingeschreven kegel? Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



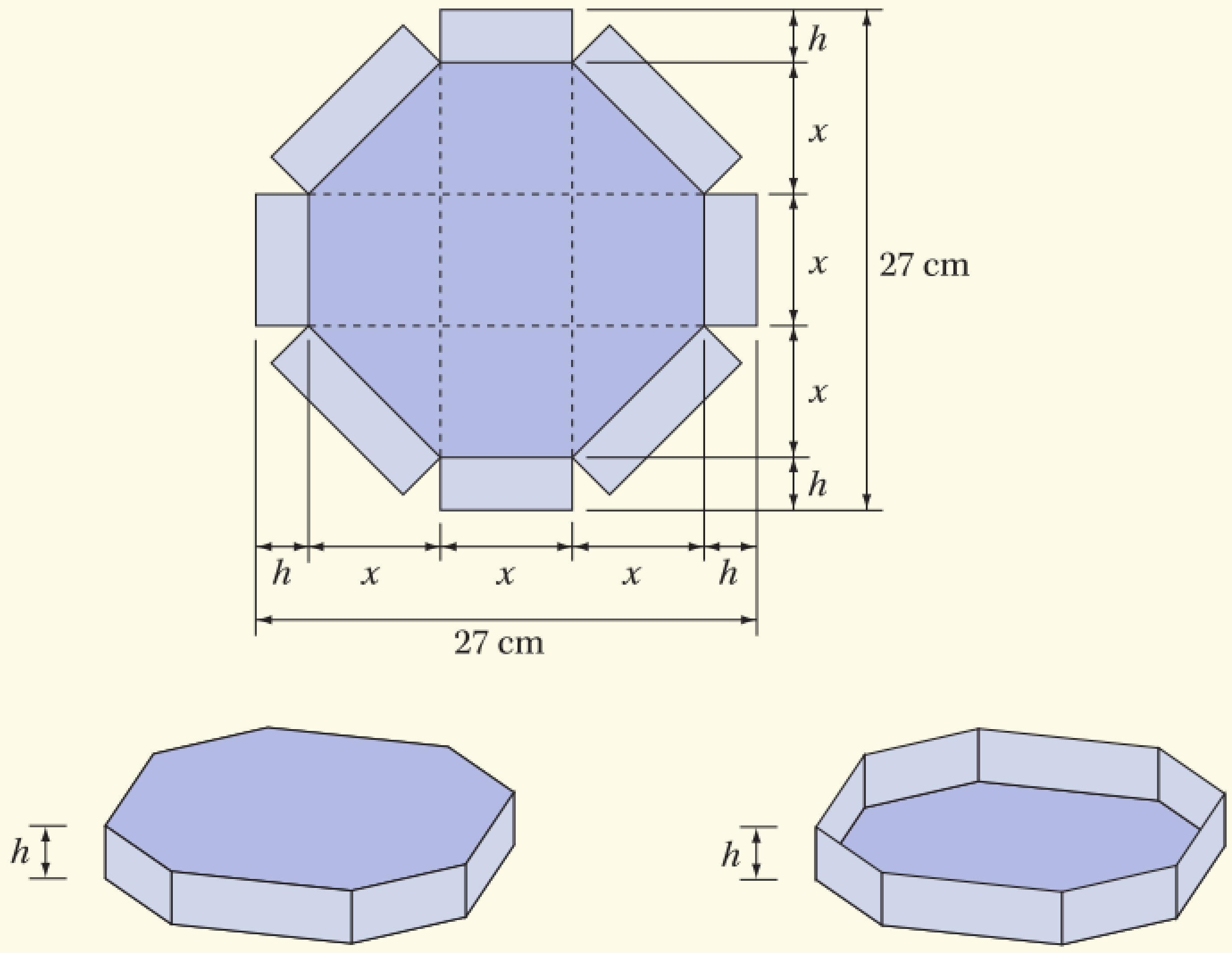
1 Stel een formule op voor het volume V van de kegel in functie van de hoogte h.

2 Voor welke hoogte is de inhoud van de kegel maximaal? Rond af op 1 mm.

3 Hoe groot is dan de straal van het grondvlak van de ingeschreven kegel? Rond af op 1 mm.

terug naar pagina 267

17 Uit een vierkant stuk karton met zijde 27 cm knippen we de helft van een achthoekig doopsuikerdoosje volgens het bouwplan in de figuur. De tweede helft is identiek aan de eerste helft, zij het een fractie groter: beide helften moeten we klemmend over elkaar kunnen schuiven.



Voor welke x-waarde is de inhoud van het doosje maximaal? Bepaal de maximale inhoud. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.

terug naar pagina 268

Exploratie van pagina 269

Raaklijnenconstructie

Wiskundigen houden ervan meetkundige constructies uit te denken die uitvoerbaar zijn met passer en liniaal.

Om de raaklijn te tekenen in een willekeurig punt van de grafiek van een functie $f(x) = ax^3$ gaan we als volgt te werk.

1 Kies een willekeurig punt $A(x, ax^3)$ op de grafiek van f.

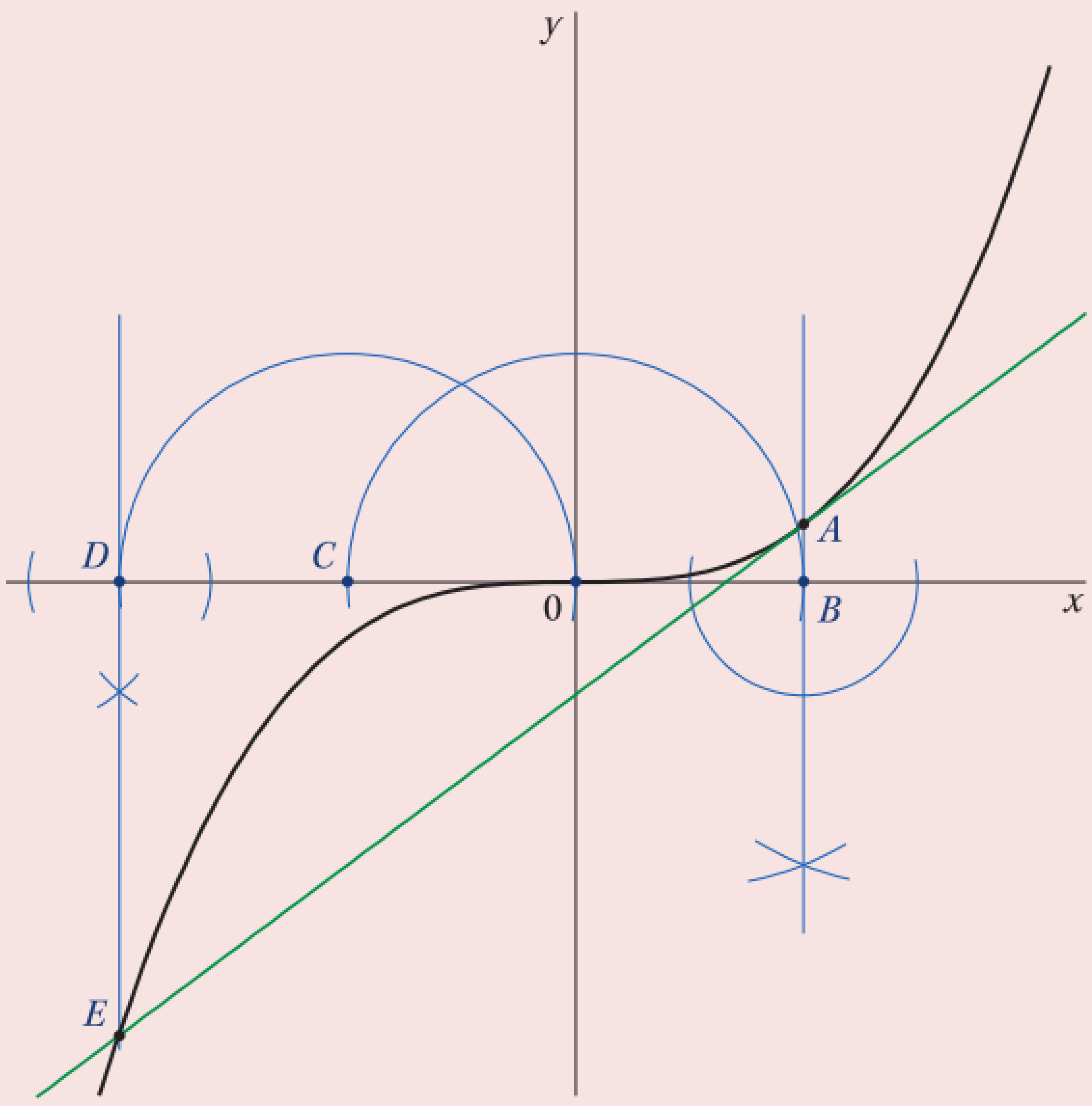
2 Projecteer A op de x-as en noem de projectie B.

3 Spiegel B om de oorsprong O en noem het spiegelbeeld C.

4 Spiegel de oorsprong O om C en noem het spiegelbeeld D.

5 Construeer in D de loodlijn op de x-as die de grafiek snijdt in E.

6 De rechte AE is de raaklijn in A aan de grafiek van f.



Deze raaklijnenconstructie kunnen we verklaren met de antwoorden op de volgende vragen.

1 Bepaal de coördinaten van de punten B, C, D en E.

2 Bereken de helling van de rechte AE.

3 Waarom raakt de rechte AE aan de grafiek van de functie $f(x) = ax^3$?

terug naar pagina 269

Uitdagingen van pagina 280 en 281

1 Bereken.

1 $D\big((x^2-4)(2x^3-1)(x^4+2)\big)$

2 $D\big((3x^4-2x^3+x+1)(x^2-x+1)\big)$

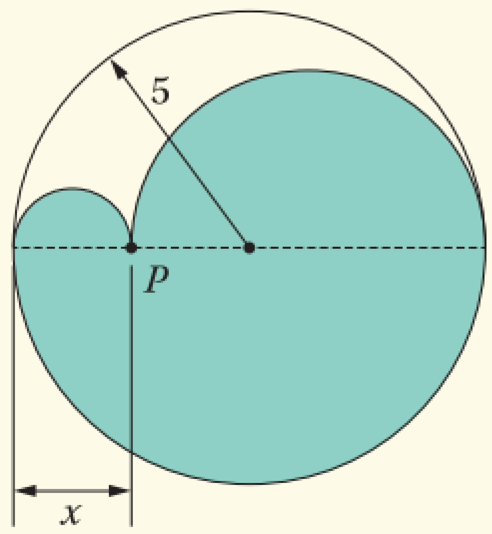
3 $D\big(5(x+3)(x-2)\big)$

4 $D\big(x^3(2x+1)(x^2-2)\big)$

5 $D\big((3x+1)(4-x)(5x-2)\big)$

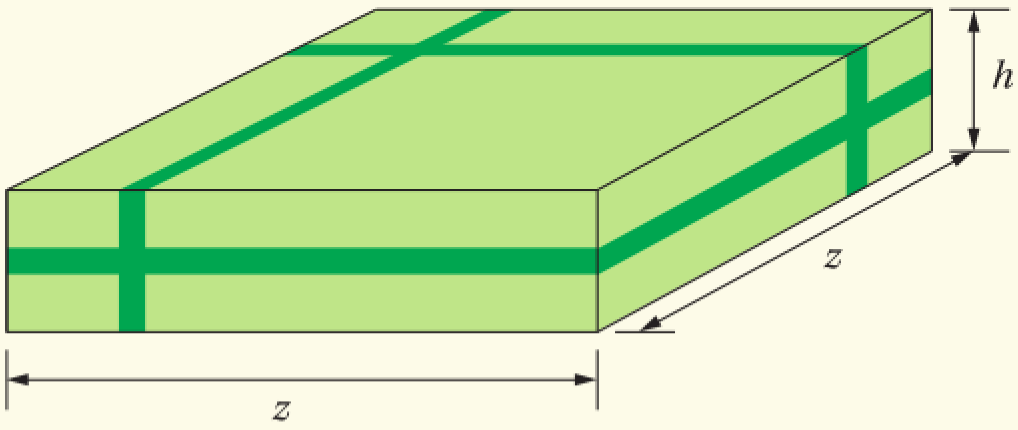
terug naar pagina 280

2 Bepaal de plaats van het punt P gelegen op een middellijn zodat de oppervlakte van de ingekleurde figuur minimaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



terug naar pagina 280

3 Een doos met een vierkante bodem is op de volgende wijze met een touw van 24 cm ingesnoerd. Bepaal de afmetingen van de doos waarvoor de inhoud maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Stel een formule op voor de inhoud V van de doos in functie van de zijde z.

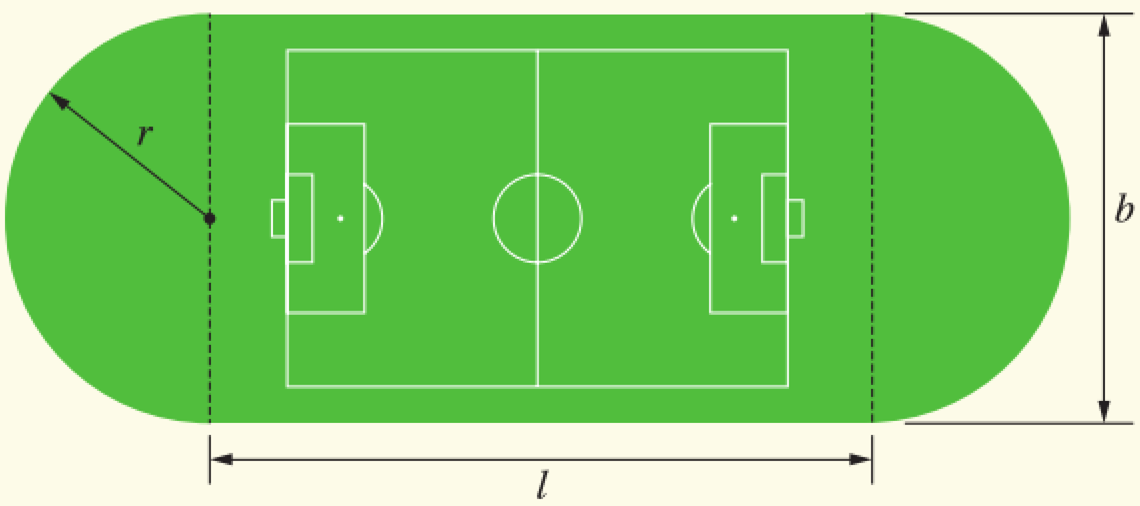
2 Welke waarde kan de zijde van de doos aannemen?

3 Voor welke afmetingen is de inhoud van de doos maximaal?

4 Wat is de maximale inhoud van de doos?

terug naar pagina 280

4 In een sportstadion wordt een voetbalveld met daarrond een 400 meter lange atletiekpiste aangelegd. Het grasveld bestaat uit een rechthoek met twee halve cirkels. Bepaal de afmetingen van de rechthoek waarvoor de oppervlakte maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



1 Stel een formule op voor de oppervlakte A van de rechthoek in functie van de straal r.

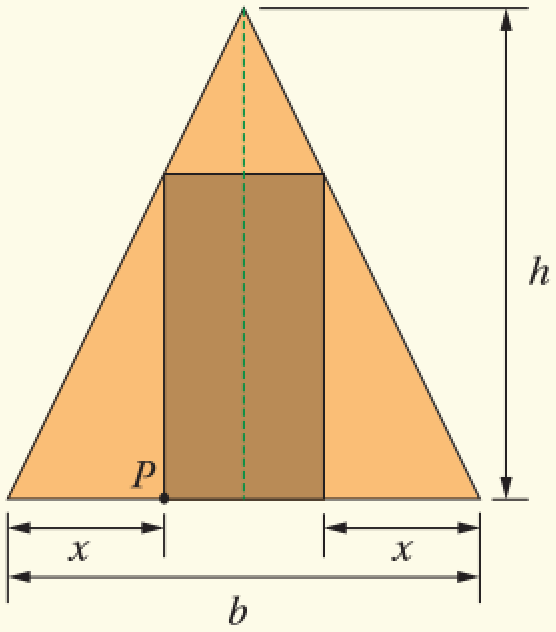
2 Welke waarden kan *r* aannemen?

3 Voor welke afmetingen van de rechthoek is de oppervlakte maximaal?

4 Wat is de maximale oppervlakte van het grasveld in are?

terug naar pagina 281

5 Gegeven is een gelijkbenige driehoek met basis b en hoogte h. Bepaal de plaats van het punt P gelegen op de basis zodat de oppervlakte van de ingekleurde rechthoek maximaal is. Los dit extremumprobleem op met de algebraïsche methode.



terug naar pagina 281

6 Bereken.

1 $\text{D}\left(x + (x + 10)^3\right)$

2 $\text{D}\left(x(x + 10)^3\right)$

3 $\text{D}\left(x^3(2x - 1)^5\right)$

4 $\text{D}\left((1 + x)^2(1 - x)^2\right)$

terug naar pagina 281

7 Gegeven is $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Toon met de formule van de afgeleide functie aan dat $p'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

terug naar pagina 281


5/6